recebido em 19 mar. 2004 – aprovado em 2 abr. 2004

ARTICULAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA, MÚSICA E FÍSICA

Roberto Camillo Perrotta

Mestre em Educação Matemática — PUC-SP;
Professor no Departamento de Ciências Exatas — Uninove.

Suzete Geraldi Montenegro Perrotta

Mestre em Educação Matemática — PUC-SP;
Professora nos Departamentos de Ciências Exatas e de Educação — Uninove.
rs5557@hotmail.com

Resumo
Neste estudo é discutida a fragmentação dos cursos e disciplinas que compõem a grade curricular e dificultam a articulação dos assuntos tratados em mais de uma disciplina ou áreas de conhecimento, por meio de uma linguagem simples, clara, direta, evitando ao máximo o emprego excessivo de fórmulas e termos técnicos específicos. Observou-se ser possível estabelecer articulações, construir pontes entre distintas áreas do conhecimento, exigências presentes na vida escolar, em todos os níveis de ensino, além de discutir os mais variados temas, abrindo a possibilidade de incluir disciplinas distintas com o uso de todos os recursos possíveis para a promoção da aprendizagem.

Palavras-chave
Articulação. Física. Matemática. Música.

ARTICULATION AMONG MATHEMATICS, MUSIC AND PHYSICS

Abstract
In this study the fragmentation of courses and disciplines that make up the curriculum schedule and that make difficult the articulation of the issues dealt with in more than one discipline or area of knowledge is discussed through a simple, clear and direct language, trying to avoid at most the excessive use of formulas and specific technical terms. It was observed that it is possible to establish articulations, create bridges among the different areas of knowledge. These are requirements present in the school daily life in all levels of teaching besides the themes can be the most variable ones, giving the possibility of including different disciplines with the use of all possible resources to the promotion of learning.

Key words
Articulation. Mathematics. Music. Physics.

Introdução

No presente texto, os autores discorrem sobre a fragmentação dos cursos e disciplinas que compõem a grade curricular dos níveis médios e superior de ensino que, em geral, dificultam a articulação dos assuntos tratados em mais de uma disciplina ou área de conhecimento, além de considerarem a aproximação de distintos conteúdos ou áreas para o desenvolvimento de temas comuns. Como exemplo, cite-se o estudo do som, tratado nas aulas de Física, que apresenta forte relação com a série harmônica estudada em Cálculo (ou em Análise Matemática) e que, por sua vez, pode ser associado à série harmônica abordada nos cursos de Música.

Às vezes, o planejamento e o desenvolvimento dos conteúdos não permitem que o professor destine parte de suas aulas para discussões de temas paralelos relacionados com o assunto tratado. No entanto, é possível propor trabalhos interdisciplinares de pesquisa de iniciação científica ou como atividade paralela, com um ou outro aluno interessado e, assim, ir além do conteúdo estabelecido no plano semestral ou anual. Experiências interdisciplinares podem ser ricas e motivadoras tanto para os alunos quanto para os docentes envolvidos.

No curso de graduação, os autores tiveram a oportunidade de encontrar um professor de Cálculo Diferencial e Integral que, além de curioso, tinha uma vontade incrível de despertar o espírito de pesquisador em seus alunos. Ao saber que um dos autores estudava Música, propôs a seguinte questão: "Qual a relação entre a série harmônica que estamos estudando e a série harmônica que vocês estudam em Música?"

Assim, há muito tempo nasceu o embrião deste artigo.

Aspectos históricos

O estudo dos fenômenos sonoros já era uma preocupação para os povos primitivos que, em geral, associavam diferentes sons à magia e ao sobrenatural. Fohi (30 a.C.), filósofo chinês, ligava a altura[1] dos sons a elementos fundamentais: ar, água, terra, fogo e vento (NEPOMUCENO, 1977).

1 Altura é a qualidade do som que permite distinguir sons graves de sons agudos.

Historicamente, a primeira lei quantitativa referente ao estudo do som foi estabelecida por Pitágoras (século VI a.C.) que, ao pesquisar o comportamento das cordas, verificou que seu comprimento estava relacionado à altura do som e, quando se reduzia o comprimento da corda à metade do valor inicial, era possível obter um som duas vezes mais agudo, o que correspondia a uma freqüência[2] duas vezes maior que a anterior. Por outro lado, muitos documentos desse período foram perdidos e, como a ordem dos pitagóricos era secreta e comunitária, é arriscado imputar exclusivamente a Pitágoras tal descoberta. Mais correto seria atribuir tais descobertas aos membros da escola pitagórica (BOYER, 2000).

2 Freqüência corresponde ao número de vibrações ou oscilações por unidade de tempo.

Em meados do século XVII, o matemático francês Marin Mersenne conseguiu relacionar a altura de um som com o número de vibrações por segundo, ou seja, com a freqüência. Nessa época, Galileu verificou que uma corda vibrando provocava oscilações em uma outra corda igual e nas mesmas condições, desde que estivesse nas proximidades (é o fenômeno da ressonância). Nesse mesmo século, Torricelli construiu o primeiro aparelho a vácuo. Com ele Kiercher demonstrou que o som não se propaga no vácuo; Gassend comparou as velocidades do som de um tiro de canhão (som grave) com um tiro de espingarda (som agudo) e constatou que sons graves e agudos apresentavam velocidades iguais (NEPOMUCENO, 1977).

Durante o século XVIII, Newton e Laplace, usando procedimentos diferentes — o primeiro por processo isotérmico[3] e o último por processo adiabático[4] —, determinaram a velocidade do som, encontrando os valores 280 e 332 metros por segundo (m/s), respectivamente. Em 1665, Newton estabelecera articulações entre taxas de variação (fluxo) e séries infinitas e, em 1742, publica sua obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (BOYER, 2000).

3 Isotérmico é o processo em que a temperatura do sistema é mantida constante.

4 Adiabático é o processo em que o sistema não troca calor com o meio externo.

Ainda no século XVIII, a publicação por Euler, de uma teoria das vibrações em cordas, o desenvolvimento da Mecânica Racional por Lagrange, Bernoulli, d'Alambert e Laplace e a teoria das séries de Fourier foram considerados muito importantes. A teoria das séries originou-se quando matemáticos e físicos debatiam o problema de como expressar um fenômeno físico por meio de uma série de senos ou co-senos. Na obra *Sur les cordes vibrantes* (1753), Daniel

Bernoulli defende a tese de generalização da solução da equação de ondas, com base na intuição física. Fazendo isso, o autor entrou em violento conflito com os matemáticos, seus contemporâneos, mais famosos (d'Alambert, Euler e outros) que afirmavam ser absurda a representação por uma série de senos ou co-senos de certos fenômenos físicos (no caso, o problema de vibração de uma corda).

Na época, não eram feitas distinções mais precisas entre séries finitas e infinitas. Pelos exemplos de Fourier, em sua obra *Théorie analytique de la chaleur* (1822), essa disputa trouxe novas perspectivas, dando uma visão mais ampla ao conceito de séries e ao desenvolvimento de modernos conceitos de função (STEVENS; WARSHOFSKY, 1982). Ao desenvolver um estudo sobre o fluxo de calor através de um corpo, percebeu que ondas complexas poderiam ser decompostas em séries simples de ondas senoidais que, quando somadas, o levariam novamente à onda complexa original.

No século XIX, o estudo dos fenômenos sonoros dá grandes passos, graças às experiências sobre eletricidade e ondas eletromagnéticas de Hertz e a trabalhos desenvolvidos por Maxwell, Faraday, Stokes, Cauchy e outros (NEPOMUCENO, 1977).

Atualmente, a área que estuda, especificamente, os fenômenos do som é conhecida como Acústica.

Aspectos do som

Quando o som é considerado fenômeno físico, pode ser entendido como o resultado do movimento de um corpo qualquer que se desloca de uma posição para outra, formando ondas na matéria que o cerca, por exemplo, a corda de um violão vibrando no ar. As cordas vibrantes, assim como as colunas de ar e as placas ou membranas em vibração, alternadamente, comprimem o ar em volta delas em seu movimento para frente e rarefazem-no em seu movimento de volta. O ar transmite essas perturbações, originando ondas mecânicas, que provêm do deslocamento de uma parte do meio elástico em relação à sua posição normal, provocando sua oscilação em torno de uma posição de equilíbrio. Em razão das propriedades elásticas do meio, o distúrbio é transmitido de uma camada à seguinte e progride através do meio. O próprio meio não se move como um todo com o movimento ondulatório; suas várias partes apenas oscilam, descrevendo trajetórias limitadas.

Quando a corda de um instrumento musical vibra (por exemplo, a de um piano ou violão), verifica-se uma reflexão da onda nas extremidades fixas dessa corda e, em dadas freqüências, a superposição das ondas assim formadas provoca uma figura de oscilação estacionária, conhecida como onda estacionária. As freqüências em que ocorrem tais configurações são as de ressonância da corda e a mais baixa é chamada de freqüência fundamental ou primeiro harmônico. A freqüência seguinte é duas vezes maior que a fundamental e é denominada segundo harmônico; as demais são: o terceiro harmônico, o quarto e assim sucessivamente, até o enésimo harmônico. As cordas vibrantes apresentam uma seqüência de freqüências naturais, múltiplos da freqüência fundamental, isto é, quando uma corda de piano vibra, ouvimos uma superposição de freqüências que corresponde a um som fundamental e a todos os harmônicos que se formam na corda. As ondas sonoras, cujas formas são quase periódicas, ou são constituídas de um pequeno número de componentes quase periódicos, originam uma sensação auditiva agradável (se a intensidade não for muito alta). Uma onda sonora, cuja forma é aperiódica, ou a superposição de ondas periódicas com número elevado de componentes provocam uma sensação auditiva de barulho. Instrumentos musicais diferentes, por exemplo, um piano e um violino, não possuem o mesmo número de harmônicos e, assim, emitem sons que permitem identificar o instrumento que os emitiu. Dizemos que os instrumentos apresentam timbres distintos, ou seja, o timbre é uma característica própria do instrumento — a mesma nota tocada em instrumentos distintos soará com timbres também distintos pelo fato de o som gerado pelo instrumento conter os harmônicos do tom fundamental em proporções diferentes (Figura 1).

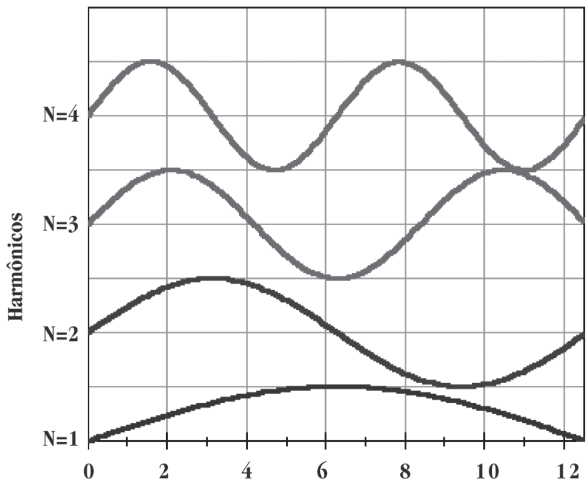

Figura 1 – Som fundamental e harmônicos numa corda.
O gráfico representa o som fundamental (n = 1) e seus primeiros três harmônicos.
Fonte: BOSQUETI; MAREGA JÚNIOR, 1997.

Essas proporções são características de cada tipo de instrumento; por exemplo, o som produzido por uma clarineta possui quase exclusivamente harmônicos ímpares, ao passo que em uma flauta apenas o primeiro e o segundo harmônico estão presentes. Desse modo, pode-se afirmar que, matematicamente, o timbre é a forma da onda resultante, quando se consideram todas as ondas produzidas em um instrumento.

Em Matemática, a série conhecida como harmônica é a série divergente dada por:

$$S = 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$$

Apesar de divergente, a série harmônica cresce lentamente (PISKUNOV, s/d.). Nessa série, cada um dos termos corresponde a um dos harmônicos de uma corda vibrante. O som fundamental, ou primeiro harmônico, corresponde ao comprimento total da corda; o segundo harmônico, a um som uma oitava acima (mais agudo e com o dobro da freqüência do fundamental) e a um comprimento que tem a metade do comprimento inicial da corda e, assim, sucessivamente.

Na Figura 2, tem-se a ilustração musical dos harmônicos, na ordem em que ocorrem e, na Figura 1, a representação das configurações das ondas que se formam, uma a uma, em corda fixa, de comprimento L, quando tangida em seu ponto médio.

Figura 2 – Série harmônica.
Quando uma corda de piano vibra, ouvimos uma superposição de freqüências que corresponde a um som fundamental (primeira nota indicada) e todos os harmônicos que se formam na corda (todas as demais notas musicais).
Fonte: BASSETO, s/d.

Uma função periódica de freqüência *f* pode ser representada como uma série de Fourier, ou seja, como a soma das funções harmônicas de freqüência múltipla inteira de *f*. Então, quando uma corda está vibrando em seu enésimo modo, um segmento da corda oscila com um movimento harmônico simples. A função da onda estacionária correspondente é dada por:

$$y_n(x,t) = A_n(x).\cos(\omega_n t + \delta_n), \text{ com } A_n(x) = A_n.\,\text{sen}k_n x$$

em que: $A_n(x)$ indica a amplitude (depende da posição no deslocamento, ou seja, varia com o decorrer do tempo), ω_n é a freqüência angular e δ_n é a fase inicial (depende das condições iniciais). A função $A_n(x)$ indica a forma da corda num dado instante (TIPLER, 2000).

Como, em geral, os sistemas não vibram em um único modo, mas seu movimento é o resultado de uma superposição de harmônicos, a função de onda é uma combinação linear das funções de ondas harmônicas que pode ser dada por:

$$y(x,t) = \sum_n A_n \,\text{sen}\, k_n\, x \cos(\omega_n t + \delta_n), \text{ com } k_n = {}^{2\pi}/_{\lambda_n} \text{ e } \omega_n = 2\pi f_n$$

Nessa função de onda, os valores de k indicam os números dos harmônicos. Assim, se $k = 1$, tem-se o primeiro harmônico ou o fundamental; se $k = 2$, tem-se um som uma oitava acima do fundamental, ou seja, o segundo harmônico e assim sucessivamente.

Um diapasão emite um som puro, de uma só freqüência (só o primeiro harmônico ou o fundamental). Outros instrumentos emitem sons que são formados por uma superposição de harmônicos e, por esse motivo, suas formas de onda podem apresentar configurações diferentes, dependendo de sua composição, tal como ilustra a Figura 3.

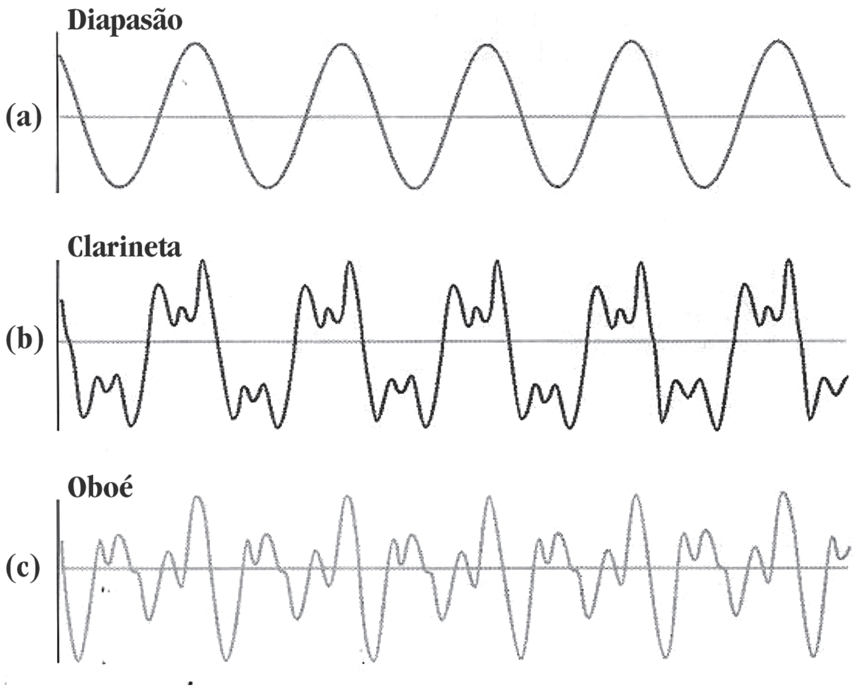

Figura 3 – Formas de ondas, segundo os timbres dos instrumentos. Os gráficos representam as formas das ondas originadas por: a) um diapasão, que emite só o 1º harmônico; b) uma clarineta, com a superposição de harmônicos, e c) um oboé que também apresenta uma superposição de harmônicos, mas diferente da clarineta.
Fonte: TIPLER, p. 465.

Nas aulas de Música, a série harmônica estudada mostra o conjunto de sons que se somam para formar cada uma das notas que se escuta quando uma tecla do piano, por exemplo, é tocada. A série harmônica estudada em Matemática mostra a soma dos meios comprimentos de onda que compõem um som, e a função de onda mostra, para um segmento reduzido da corda vibrante, como sua posição varia no decorrer do tempo. A Física usa todos os recursos descritos, musicais e matemáticos, para explicar os fenômenos sonoros.

Considerações finais

O presente artigo procurou apresentar, por meio de uma linguagem simples, clara e objetiva, além de evitar ao máximo o uso excessivo de fórmulas e termos técnicos específicos a cada uma das áreas envolvidas, aspectos da série harmônica em diferentes contextos, estabelecendo articulações entre Matemática, Física e Música.

O trabalho que foi apresentado poderia ser realizado por alunos de Ensino Médio ou Superior, dependendo da profundidade pretendida. Pode-se solicitar, por exemplo, aos alunos da área do curso de Matemática, uma demonstração da obtenção da equação de ondas[5] e, considerando as condições limitantes nos extremos da corda bem como as condições iniciais, indicar a equivalência entre essa situação e a função escrita, como se observou neste trabalho,

$$y(x,t) = y(x,t) = \sum_n A_n \operatorname{sen} k_n x \cos(\omega_n t + \delta_n),$$

utilizando a separação de variáveis e as séries de Fourier (HSU,1973).

Pode-se também ir além e incluir mais uma área de conhecimento — a Biologia —, levantando questões do tipo: como funciona o aparelho auditivo? Existe ainda a possibilidade do uso de *softwares* que permitem a decomposição do som em seus harmônicos, e de outros que realizam o processo inverso, combinando vários harmônicos, e apresentam um som resultante final. Numa situação assim, é possível 'ver' o som, tal como Steffani; Veit; Oliveira; Torres; Carrasco (2002) propõem em seu trabalho.

Estabelecer articulações, construir pontes entre diferentes áreas do conhecimento são exigências presentes na vida escolar em todos os níveis de ensino, sobretudo nos dias atuais. Os temas podem ser o mais variados possível, mas devem abrir a possibilidade de incluir

5 Equação de ondas:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

disciplinas distintas e lançar mão de todos os recursos possíveis para promover o aprendizado de um conteúdo, dentro de um contexto mais amplo e abrangente.

Referências

BASSETO, Bruno. *Anotações sobre harmonia e contraponto*. Apostila. s/d. Disponível em: <http://geocities.yahoo.com.br/bbasseto/bdados/notas001.htm>. Acesso em: 23 fev. 2004.

BOSQUETTI, Diógenes; MAREGA JÚNIOR, Euclydes. *Curso de ondulatória mecânica via internet*. Site Centro de Divulgação Científica e Cultural (CDCC), Universidade de São Paulo (USP). 13 ago. 1997. Disponível em: <http://www.cdcc.sc.usp.br/ondulatoria/musica3.html>. Acesso em: 23 fev. 2004.

BOYER, C. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 2000.

HSU, H. P. *Análise de Fourier*. Rio de Janeiro: LTC, 1973.

NEPOMUCENO, L. X. *Acústica*. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

PISKUNOV, N. *Integral and diferential calculus*. Moscou: Peace Publishers, s/d.

STEFFANI, M. H.; VEIT, E. A.; OLIVEIRA, L. M.; TORRES, M. C. A. R.; CARRASCO, L. H. M. *Vendo o som com o uso de novas tecnologias de informática e comunicação*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/cref/ntef/>. Acesso em: 4 jun. 2004.

STEVENS, S. S.; WARSHOFSKY, F. *Som e audição*. Rio de Janeiro: José Olympio, 1982.

TIPLER, P. *Física*. v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2000.