

Uma nova abordagem baseada em *wavelets* para o método multigrid algébrico: parte I – Algoritmo seqüencial

Fabio Henrique Pereira

Pós-doutorando do Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado, Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas da Escola politécnica – USP.
São Paulo – SP [Brasil]
fabio@pea.usp.br
fabio.pea@gmail.com

Sílvio Ikuyo Nabeta

Prof. Dr. do Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado, Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas da Escola politécnica – USP.
São Paulo – SP [Brasil]
nabeta@pea.usp.br

Neste trabalho, apresenta-se uma nova abordagem baseada em *wavelets* para o método multigrid algébrico, a qual consiste em utilizar uma variação da transformada discreta *wavelet* para construir a hierarquia de matrizes na fase de montagem do método multigrid, eliminando algumas dificuldades presentes na abordagem convencional. O método proposto foi aplicado na resolução de sistemas lineares relacionados à equação de Poisson bidimensional, e os resultados comparados àqueles obtidos com o uso de algumas das mais atuais e avançadas abordagens do método multigrid algébrico tradicional.

Palavras-chave: Método multigrid algébrico.
Métodos iterativos. Sistemas lineares esparsos.
Transformada discreta *wavelet*.



1 Introdução

A simulação computacional é uma poderosa ferramenta para auxiliar a compreensão dos diversos fenômenos físicos que ocorrem na natureza e que são objetos de estudo em diferentes áreas de pesquisa. Ao contrário de métodos puramente analíticos, a simulação computacional possibilita a utilização de um grande número de graus de liberdade no tratamento dos fenômenos, bem como a incorporação de efeitos não-lineares, não-simétricos e multidisciplinares, inerentes a determinados problemas.

Nas ciências matemáticas, físicas e nas engenharias, a simulação computacional envolve, em geral, a solução numérica de uma equação diferencial parcial (EDP) pela aplicação de diversos métodos numéricos, entre os quais, os métodos de discretização do domínio dos elementos finitos (MEF) e das diferenças finitas. Esses métodos transformam o domínio contínuo, no qual a EDP está definida, em um domínio discreto, gerando um sistema de equações algébricas que, quando resolvido, fornece a solução nos pontos discretos do domínio de cálculo.

Nesse processo, a resolução desse sistema de equações algébricas resultante é a etapa mais trabalhosa computacionalmente. Por serem esses sistemas geralmente muito grandes e possuírem características distintas, como esparsidade e mau condicionamento, o uso de métodos diretos fica limitado por questões de memória computacional. Dessa forma, a solução quase sempre exige o uso de métodos iterativos eficientes em conjunto, quando possível, com técnicas avançadas de condicionamento.

O método multigrid é adequado para esse tipo de problema, uma vez que, além de possuir características desejáveis de convergência e custo computacional, pode ser usado tanto como méto-

do iterativo quanto como preconditionador para outro método iterativo apropriado.

2 A técnica multigrid

O princípio de funcionamento da técnica multigrid está intimamente relacionado ao comportamento de convergência dos métodos iterativos estacionários como os de Jacobi e Gauss-Seidel. Uma análise detalhada desses métodos permite afirmar que se, por um lado, eles são muito eficientes na eliminação dos componentes de alta frequência do erro, por outro, são ineficazes no que diz respeito à remoção dos componentes suaves. Por essa razão, são também chamados de suavizadores.

Como os componentes suaves do erro aparecem mais oscilatórios em um domínio com discretização menos refinada, essa característica de suavização dos métodos iterativos estacionários sugere a transferência do problema para outro nível de resolução, no qual a discretização do domínio da EDP possui um menor número de pontos. A repetição recursiva desse processo dá origem ao método multigrid.

Para realizar a tarefa de explorar a utilização de vários níveis (também chamados *grids*) na resolução de um problema, o método multigrid necessita de alguns componentes básicos:

- 1) **Hierarquia de matrizes** – representação da matriz original em cada *grid*;
- 2) **Operadores de transferência** – operadores de restrição R e prolongamento P usados para transferir os vetores entre os diferentes *grids*;
- 3) **Suavizadores** – métodos iterativos estacionários como os de Jacobi ou Gauss-Seidel;
- 4) **Método direto** – para resolver a equação residual no *grid* mais grosseiro.

No contexto algébrico, esses componentes são construídos utilizando-se apenas informações da matriz de coeficientes do sistema. Assim, o método multigrid algébrico (AMG) é muito adequado para problemas com geometrias irregulares e muito útil nos chamados métodos *plug-in* ou *black box solver*.

Definidos todos os componentes necessários, um algoritmo de correção do erro com dois *grids* é obtido, conforme ilustrado no Algoritmo 1, no qual os sobrescritos h e $2h$ simbolizam o espaçamento entre os pontos do *grid*, em que cada vetor ou matriz está definido:

Algoritmo 1: esquema de correção com dois *grids*:

1. Aplique ν_1 passos do suavizador em $A^h u^h = f^h$ com estimativa inicial v^h
2. Calcule $r^h = f^h - A^h \cdot v^h$ e $r^{2h} = Rr^h$
3. Resolva $A^{2h} e^{2h} = r^{2h}$ em Ω^{2h}
4. Calcule $e^h = P e^{2h}$ e corrija a solução aproximada v^h em Ω^h conforme: $v^h \leftarrow v^h + e^h$
5. Aplique ν_2 passos de suavização em $A^h u^h = f^h$, com estimativa inicial v^h .

Um algoritmo para o método multigrid é obtido simplesmente substituindo a terceira instrução do algoritmo 1 por uma chamada recursiva desse mesmo esquema de correção com dois *grids*. É importante observar que, para evitar a transferência de dois vetores f^h e v^h em cada nível do método, o algoritmo resolve a equação residual $A^{2h} e^{2h} = r^{2h}$ em Ω^{2h} , usando como estimativa inicial o vetor nulo.

3 Dificuldades da abordagem algébrica tradicional

Um dos maiores problemas do método AMG tradicional reside na etapa de montagem, que com-

preende a construção dos operadores de transferência e a criação da hierarquia de matrizes.

Ao contrário da abordagem geométrica que cria uma hierarquia de matrizes partindo de um conjunto de malhas com diferentes discretizações, o AMG faz uma seleção de um subconjunto das incógnitas (representação algébrica dos pontos da discretização) para representar o próximo nível na hierarquia. A grande dificuldade desse processo de seleção é que ele se fundamenta em critérios puramente heurísticos que definem relações de influência e dependência entre incógnitas vizinhas. Esse processo envolve a escolha de parâmetros para determinar quais incógnitas do sistema são mais representativas e, conseqüentemente, melhores candidatas para formar o próximo nível de solução.

Um exemplo dessa dificuldade é a escolha de um valor adequado para o parâmetro α na definição das fortes conexões na matriz. Em geral, usa-se $\alpha = 0.25$, mas, infelizmente, esse valor nem sempre produz bons resultados (ANTONELLI; CHARTIER, 2003). Uma tentativa de contornar essa dificuldade é apresentada por Pereira, Verardi e Nabeta (2005).

Outro grande problema do AMG diz respeito à paralelização do processo de seleção das incógnitas. O esquema tradicional possui natureza seqüencial, especialmente quando se utiliza uma técnica com base na Decomposição do Domínio (BOIER-MARTIN, 2003; HOPPE, 2004). Essa é, sem dúvida, uma séria limitação da abordagem, pois uma das conseqüências imediatas das características da técnica multigrid é o imediato interesse na sua paralelização.

4 Multigrid e wavelets

Wavelets são funções $\psi_{a,b}(t)$ obtidas por meio de translações e dilatações (contrações ou escala-



mento) de uma função $\psi(t)$ chamada *wavelet mãe*. Introduzindo as dilatações por um fator de escalamento a e as translações por meio de uma variável b , a forma geral de uma família dessas funções é dada por:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1)$$

(com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$) O termo $1/\sqrt{a}$ é introduzido para preservar a norma da função no espaço das funções quadraticamente integráveis $L^2(\mathbb{R})$.

Uma importante característica das funções definidas em (1) é que elas formam uma base para o espaço $L^2(\mathbb{R})$. Assim, uma função $f(t)$ nesse espaço pode ser aproximada por uma combinação das *wavelets* usando coeficientes $c_{a,b}$ dados pela expressão (2)

$$c_{a,b} = [f, \psi_{a,b}] \quad (2)$$

na qual $[\cdot, \cdot]$ denota o produto interno em $L^2(\mathbb{R})$.

O termo *wavelet* é uma tradução para o inglês das palavras francesas *ondelettes* ou *petites ondes*, ou seja, pequenas ondas. Em português, recebem também o nome de ondaletas (MORETTIN, 1999). Na verdade, os termos *wavelet* e ondaletas são usados para sugerir que se trata de funções localizadas, em frequência, em torno de um valor central.

A transformada *wavelet* utiliza uma técnica de multirresolução para analisar diferentes frequências em diferentes resoluções. Como as funções *wavelets* possuem localização temporal e, além disso, são com dois parâmetros (translações e escalamento ou contração), os componentes de alta frequência do sinal podem ser representados por *wavelets* de curta duração (maior resolução temporal). Por outro lado, os componentes de baixa frequência são analisados em períodos de tempo mais longos, como ilustrado na Figura 1.

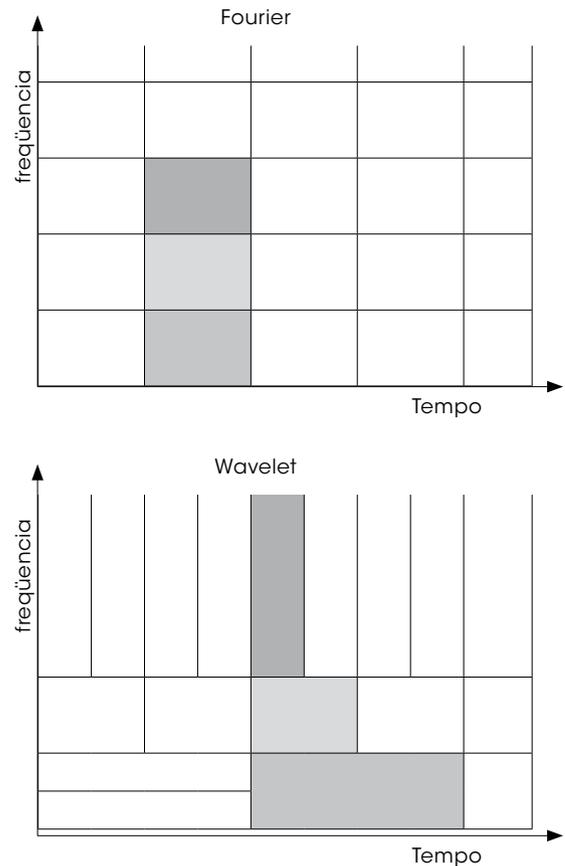


Figura 1: Cobertura do plano tempo-frequência por Fourier Janelada (Gabor) e wavelets

Fonte: Sarkar, Salazar-Palma e Michael, 2002.

Formalmente, a análise em multirresolução (AMR) com *wavelets* pode ser definida da seguinte forma:

Definição 1: uma análise em multirresolução é uma seqüência $V_j (j \in \mathbb{Z})$ de subespaços fechados aninhados,

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \quad (3)$$

tais que a união é densa no espaço das funções quadraticamente integráveis $L^2(\mathbb{R})$. Além disso, tem-se que

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0; \quad (4)$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0 \quad (5)$$

$$f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x - n) \in V_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

Outras importantes características desses subespaços são:

- a) V_0 é gerado por um conjunto ortonormal obtido por meio de translações inteiras de uma única função $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$, chamada escaladora

$$V_0 = \{(\Phi(x - n))_{n \in \mathbb{Z}}\} \quad (7)$$

Para cada inteiro j , V_j é gerado por uma base ortonormal obtida da forma

$$V_j = \{(\Phi(2^{-j}x - k))_{k \in \mathbb{Z}}\} \quad (8)$$

- b) Para cada inteiro j , $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$, na qual o símbolo \oplus significa a soma direta entre os espaços, cada W_{j+1} é gerado por um conjunto ortonormal obtido por meio de translações e escalamentos de uma única função *wavelet*,

$$W_j = \{(\psi(2^{-j}x - k))_{k \in \mathbb{Z}}\} \quad (9)$$

- c) O conjunto obtido da forma

$$\{(\psi(2^{-j}x - k))_{j,k \in \mathbb{Z}}\} \quad (10)$$

é uma base de $L^2(\mathbb{R})$.

Na prática, a análise em multirresolução é empregada em problemas discretos que estão definidos, ou são projetados no subespaço V_0 que representa o mais alto nível de resolução em AMR. Assim, dado um vetor (sinal discreto) $u \in V_0$, os coeficientes $c_{0,k}$ da expansão de u em termos da base (7) são obtidos usando a ortogonalidade de Φ , e ψ

$$u = \sum_k c_{0,k} \Phi(x - k) \quad (11)$$

A expressão (11) pode ser considerada a representação de u no *grid* mais refinado.

Outros coeficientes $c_{1,k}$ e $d_{1,k}$ podem ser encontrados para representar u em V_1 e W_1 da forma:

$$u = \sum_k c_{1,k} \Phi\left(\frac{x}{2} - k\right) + d_{1,k} \psi\left(\frac{x}{2} - k\right) \quad (12)$$

Segundo a teoria de multirresolução, o resultado da decomposição de V_0 em uma soma de subespaços V_1 e W_1 é que a maior parte da variação (energia da função) fica contida em V_1 e a representação dessa função em W_1 é praticamente nula. Assim, os coeficientes $c_{1,k}$ podem ser considerados como uma aproximação de u no espaço V_1 , e o processo pode continuar até atingir o nível mais grosseiro, sempre decompondo cada representação de u em V_j no próximo par de subespaços V_{j+1} e W_{j+1} . A decomposição de um espaço vetorial V_n em subespaços mutuamente ortogonais, na forma

$$V_n = V_l \oplus V_l \oplus V_{l+1} \oplus \dots \oplus W_{n+1} \quad (13)$$

é denominada transformada discreta *wavelet* (DWT). Na prática, a DWT é realizada usando filtros digitais passa-banda que capturam uma aproximação (coeficientes $c_{j,k}$) do sinal e os coeficientes de detalhes ($d_{j,k}$). Mais detalhes sobre a relação entre a transformada *wavelet* e banco de filtros podem ser encontrados em Pereira (2007). Uma DWT com três níveis é ilustrada esquematicamente na Figura 2, na qual os blocos G e H representam, respectivamente, os filtros passa-alta e passa-baixa, e o símbolo ($\downarrow 2$) indica uma operação de decimação (subamostragem) que consiste em eliminar as amostras de índice ímpar do sinal de entrada. A decimação é feita para preservar a dimensão do sinal.

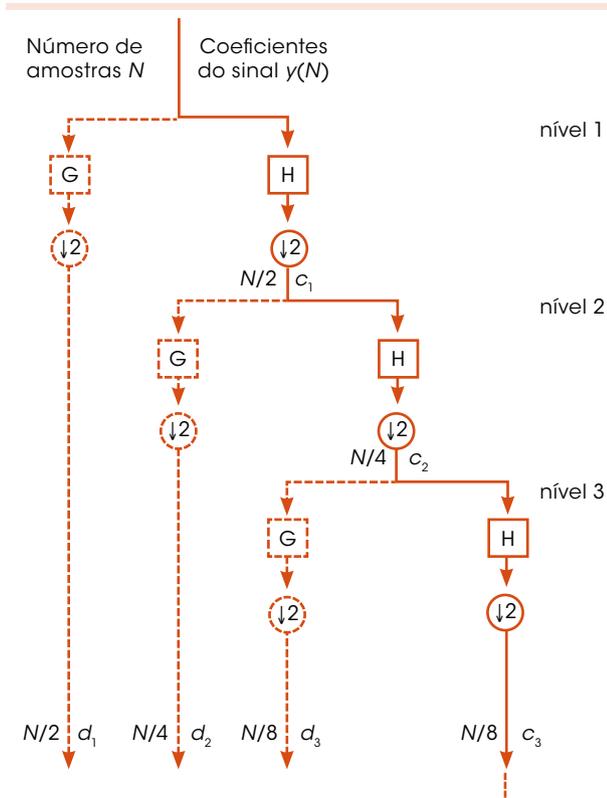


Figura 2: Transformada discreta *wavelet* com três níveis

Fonte: Briggs, Henson e McCormick, 2000.

No contexto do multigrid, o uso de *wavelets* foi abordado pela primeira vez por Briggs e Henson (1993). Eles observaram que o espaço da mais alta resolução na análise de multirresolução com *wavelet* pode ser relacionado ao do grid mais refinado no esquema multigrid.

5 O Método multigrid algébrico baseado em *wavelet*

Este trabalho apresenta uma nova abordagem para o método multigrid algébrico baseado em uma variação da transformada discreta *wavelet*.

Na DWT tradicional, muito empregada no processamento de sinais e imagens digitais, os coeficientes de detalhes capturados pelos filtros passa-alta são utilizados na reconstrução do sinal

decomposto. Entretanto, como no contexto do multigrid algébrico não existe a necessidade de reconstruir o sinal digital (matriz e vetores), a nova abordagem apresentada aqui consiste no uso apenas dos filtros passa-baixa, capturando as aproximações necessárias para representar o problema em um nível com menos refinamento (menor resolução). Essa operação é ilustrada, em destaque, no ramo direito da árvore da Figura 2.

No caso bidimensional, o procedimento ilustrado na Figura 2 é aplicado nas linhas e colunas da matriz, para gerar uma aproximação em cada nível do processo de multirresolução. Essa abordagem para o método multigrid algébrico, chamada WAMG, foi proposta por Pereira, Verardi e Nabeta (2006) e tem apresentado resultados muito promissores.

Essa nova abordagem elimina a necessidade da escolha heurística de parâmetros, assim como todo o processo de seleção e interpolação necessário ao procedimento padrão do AMG e que dificulta a paralelização do método. De fato, além de sua eficiência numérica, o algoritmo proposto é altamente paralelizável (PEREIRA; NABETA, 2007).

6 Resultados quantitativos de convergência para o WAMG

Neste trabalho, foi realizada numericamente uma análise quantitativa da convergência do método WAMG. Isso ocorreu por meio da aplicação do método em uma série de problemas-teste. Os aspectos quantitativos foram observados e medidos na prática, de maneira numérica, de acordo com os critérios apresentados nesta seção.

A determinação do fator de convergência ρ , mesmo que de maneira empírica (estimado numericamente), é muito importante na análise e avaliação do método WAMG. Em geral, a defi-

nição de ρ é feita utilizando-se o vetor resíduo r , que está disponível em cada interação do método. Essa medição pode ser feita, por exemplo, usando a expressão

$$q^{(m)} = \frac{\|r^m\|_2}{\|r^{m-1}\|_2} \quad (14)$$

ou

$$\hat{q}^{(m)} = \sqrt[m]{q^{(m)} \cdot q^{(m-1)} \dots q^{(1)}} = \sqrt[m]{\frac{\|r^m\|_2}{\|r^0\|_2}} \quad (15)$$

A quantidade $\hat{q}^{(m)}$ representa uma média do fator de redução do resíduo em m iterações; $r^0 \neq 0$, $\hat{q}^{(m)} \rightarrow \rho \cdot \hat{q}^{(m)}$ é uma boa estimativa para ρ se m for suficientemente grande (TROTTEMBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001). Além disso, uma vez que as primeiras iterações, em geral, não refletem o comportamento de convergência assintótico do método, é conveniente redefinir $\hat{q}^{(m)}$ como

$$\hat{q}^{(m)} = \sqrt[m-m_0]{\frac{\|r^m\|_2}{\|r^{m_0}\|_2}} \quad (16)$$

para um pequeno número m_0 , tipicamente entre 2 e 5.

Para analisar quantitativamente o WAMG, o método foi testado em problema-modelo, e seu fator de convergência, medido conforme descrito na equação (16). Para facilitar a comparação entre a abordagem apresentada neste trabalho e algumas das mais modernas e sofisticadas abordagens algébricas do multigrid, foram escolhidos como problemas-modelo os mesmos utilizados em Chang e Huang, (2002). Esses resultados são usados para avaliar o desempenho do WAMG no que diz respeito ao fator de convergência do método quando utilizado como uma técnica iterativa de solução. Nesse caso, todos os métodos são testados nas

mesmas condições, de acordo com o Algoritmo 2 a seguir:

Algoritmo 2: método iterativo multigrid:

$v \leftarrow MG(A, f, \sigma)$

1. $v \leftarrow 0$
2. $v \leftarrow \mu(v, f)$
3. Para $i = 1, \dots$, até convergência, faça:

$r \leftarrow f - Av$

$e \leftarrow 0$

$e \leftarrow \mu(e, r)$

$v \leftarrow v + e$

Aplique σ passos de suavização em $Au = f$, com estimativa inicial v

Fim.

No Algoritmo 2, a instrução $\mu(\cdot, \cdot)$ representa o chamado ciclo de multigrid em V, ou V-ciclo, que é obtido substituindo a linha 3 do Algoritmo 1 por uma chamada recursiva do procedimento ilustrado naquele mesmo algoritmo.

Os detalhes dos problemas tratados e os resultados numéricos correspondentes são apresentados na próxima seção.

7 Exemplos numéricos

Nesta seção, é relatada uma série de resultados numéricos de vários problemas-teste para avaliar o desempenho do método WAMG, em comparação a algumas das mais modernas e atuais abordagens algébricas do multigrid apresentadas em (CHANG; HUANG, 2002).

Todos os resultados são reportados usando a seguinte notação:

- ρ fator de convergência assintótica (medido pela expressão 16);
- t_s tempo gasto na fase de solução;
- t_m tempo gasto na fase de montagem;



N número de iterações necessárias para convergência;
 EQ dimensão do sistema linear correspondente.

Os tempos são apresentados em segundos e a convergência é definida de tal forma que o vetor resíduo r satisfaça a relação $\|r\|/\|r_0\| < 10^{-6}$.

Em todos os testes foi usado um vetor do lado direito f escolhido de forma que a solução exata u seja um vetor com todos os elementos iguais a 1.0. Como estimativa inicial foi usado o vetor nulo.

O método de Gauss-Seidel com relaxação foi usado como suavizador, e o método WAMG, implementado com filtros de Daubechies de comprimento 2, 4 e 6 (DAUBECHIES, 1988).

As abordagens apresentadas por Chang e Huang (2002) são identificadas nas tabelas como Métodos I, II, III, IV, V, VI, VII e VIII, de acordo com denominação empregada pelos próprios autores no referido trabalho. Os resultados referentes a esses métodos foram transcritos aqui literalmente.

Todos os testes foram realizados utilizando-se um computador com processador AMD Sempron 2.4+ com 1.67 GHz e 768 MB de memória RAM.

Problema 1: equação de Poisson em um quadrado unitário com condições de contorno de Dirichlet.

Para esse caso, considerou-se uma aproximação por diferenças finitas (DF), representada pelo estêncil padrão de 5 pontos.

$$L_b^{(5)} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}_h \quad (17)$$

Para esse mesmo problema, considera-se também uma aproximação por DF de ordem mais alta, ilustrada pelo estêncil de diferenças de 9 pontos.

$$L_b^{(9)} = \frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} & -1 & -4 & -1 & & & & & \\ & -4 & 20 & -4 & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix}_h \quad (18)$$

Os resultados para esses dois testes são apresentados, respectivamente, nas Tabelas 1 e 2.

Problema 2: equação anisotrópica (19) em um quadrado unitário com condição de contorno de Dirichlet.

$$-\epsilon u_{xx} - u_{yy} = f \quad (19)$$

Novamente, utilizou-se uma discretização com o uso do estêncil de diferenças finitas com 5 pontos

$$L_b^{(5)}(\epsilon) = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & & -1 & & \\ -\epsilon & 2(1+\epsilon) & -\epsilon & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}_h \quad (20)$$

Os resultados para $\epsilon = 0.01$ são apresentados na Tabela 3.

Problema 3: equação com termo envolvendo derivadas em relação a x e y , na forma (21), a qual é elíptica para $|\epsilon| < 2$, parabólica para $|\epsilon| = 2$ e hiperbólica para $|\epsilon| > 2$.

$$L^\epsilon u = -\Delta u + \epsilon u_{xy} = f \quad (21)$$

O Problema 3 é resolvido para $\epsilon = 1.5$, com discretização de segunda ordem dada pelo estêncil com 7 pontos

$$L_b^{(7)}(\epsilon) = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & & -\frac{\epsilon}{2} & & -1 + \frac{\epsilon}{2} & & \\ & & & & & & \\ -1 + \frac{\epsilon}{2} & & & 4 - \epsilon & & -1 + \frac{\epsilon}{2} & \\ & & & & & & \\ & & & & -1 + \frac{\epsilon}{2} & & -\frac{\epsilon}{2} \\ & & & & & & \end{bmatrix}_h \quad (22)$$

Tabela 1: Resultados para o Problema 1 com $L_h^{(5)}$

EQ	Método	ρ	N	t_m	t_s
64 ²	I	0,021	4	0,17	0,12
	II	0,017	4	0,16	0,10
	III	0,062	5	0,05	0,16
	IV	0,078	6	0,06	0,16
	V	0,020	4	0,11	0,11
	VI	0,017	4	0,11	0,17
	VII	0,018	4	0,11	0,11
	VIII	0,018	4	0,11	0,11
	WAMG(2)	0,0001	2	0,05	0,08
	WAMG(4)	0,0090	3	0,14	0,17
	WAMG(6)	0,0006	2	0,20	0,10
	128 ²	I	0,022	4	0,61
II		0,017	4	0,71	0,40
III		0,079	6	0,28	0,50
IV		0,087	6	0,45	0,55
V		0,020	4	0,44	0,43
VI		0,017	4	0,61	0,50
VII		0,017	4	0,44	0,49
VIII		0,017	4	0,44	0,54
WAMG(2)		0,0001	2	0,18	0,29
WAMG(4)		0,0012	3	0,57	0,64
WAMG(6)		0,0002	3	0,83	0,77

Fonte: Os autores.

Tabela 2: Resultados para o Problema 1 com $L_h^{(9)}$

EQ	Método	ρ	N	t_m	t_s
64 ²	I	0,076	6	0,16	0,22
	II	0,061	5	0,17	0,16
	III	0,097	6	0,11	0,16
	IV	0,086	6	0,11	0,17
	V	0,060	5	0,11	0,11
	VI	0,061	5	0,16	0,11
	VII	0,060	5	0,11	0,11
	VIII	0,061	5	0,16	0,11
	WAMG(2)	0,00001	2	0,07	0,13
	WAMG(4)	0,00008	2	0,14	0,16
	WAMG(6)	0,00003	2	0,22	0,16

Fonte: Os autores.

Os resultados correspondentes a esse caso são mostrados na Tabela 4.

Tabela 3: Resultados para o Problema 2

EQ	Método	ρ	N	t_m	t_s
64 ²	I	0,025	4	0,16	0,16
	II	0,015	4	0,16	0,11
	III	0,025	4	0,06	0,11
	IV	0,051	5	0,11	0,05
	V	0,025	4	0,11	0,16
	VI	0,010	3	0,11	0,10
	VII	0,010	3	0,11	0,13
	VIII	0,010	3	0,11	0,16
	WAMG(2)	0,000001	2	0,04	0,08
	WAMG(4)	0,000002	2	0,14	0,08
	WAMG(6)	0,000002	2	0,21	0,10

Fonte: Os autores.

Tabela 4: Resultados para o Problema 3

EQ	Método	ρ	N	t_m	t_s
64 ²	I	0,058	5	0,17	0,17
	II	0,049	5	0,22	0,10
	III	0,084	6	0,11	0,11
	IV	0,087	6	0,16	0,11
	V	0,052	5	0,11	0,12
	VI	0,050	5	0,11	0,16
	VII	0,052	5	0,11	0,16
	VIII	0,050	5	0,22	0,14
	WAMG(2)	0,000002	2	0,05	0,10
	WAMG(4)	0,00002	2	0,14	0,11
	WAMG(6)	0,00001	2	0,21	0,12

Fonte: Os autores.

8 Discussão e Conclusões

A utilização de uma variação da transformada discreta *wavelet* na construção da hierarquia de matrizes e dos operadores de transferência no WAMG eliminou algumas das dificuldades da abordagem algébrica tradicional, comentadas ao longo deste trabalho, e produziu um método robusto que pode ser utilizado como uma técnica iterativa de resolução ou como um preconditionador para outros métodos iterativos. Para mais detalhes sobre o



uso do WAMG como preconditionador, veja Pereira (2007).

Os resultados apresentados mostram o melhor desempenho do WAMG em relação às abordagens tradicionais do multigrid algébrico. No que se refere aos resultados das abordagens algébricas introduzidas em Chang e Huang (2002), o WAMG apresentou desempenho superior em todos os casos testados. Isso contribui para a promoção da abordagem proposta neste trabalho, especialmente porque aqueles métodos em Chang e Huang (2002) representam um avanço em relação à abordagem padrão (Método I).

Além de eliminar todos os parâmetros e critérios heurísticos presentes na abordagem tradicional, o WAMG também possui características mais adequadas à paralelização. De fato, a versão paralela do método proposto tem produzido resultados muito bons, como pode ser visto em Pereira e Nabeta (2007).

Por fim, conforme previsto na teoria dos métodos multigrid (TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHULLER, 2001), o WAMG apresentou uma convergência independente do espaçamento h entre os pontos da discretização e uma desejável propriedade de escalabilidade, ou seja, um aumento no tempo gasto na etapa de solução diretamente proporcional ao aumento da dimensão dos problemas testados, como pode ser observado, por exemplo, nos resultados da Tabela 1.

A new wavelet-based Algebraic Multigrid Method: Part I - Sequential Algorithm

In this work, it is introduced a new wavelet-based algorithm for Algebraic Multigrid Method (WAMG) using a variation of the standard implementation of discrete wavelet transforms. This new approach eliminates the grid coarsening process in traditional AMG

setup phase simplifying its implementation on distributed memory machines. The WAMG method is used as a “black box” solver in some numerical problems concerning the two dimensional Poisson equation. The numerical results compare the efficiency of the new approach with some of the most advanced and current AMG algorithms.

Key words: Algebraic multigrid method. Discrete wavelet transform. Interactive methods. Sparse linear system.

Referências

- ANTONELLI, M. J.; CHARTIER, T. P. *Optimization of strength threshold in algebraic multigrid for immersed interface problems*. University of Washington, Technical report, 2003.
- BOIER-MARTIN, I. M. Domain decomposition for multiresolution analysis. In: ACM INTERNATIONAL CONFERENCE PROCEEDING SERIES, PROCEEDINGS OF THE 2003 EUROGRAPHICS/ACM SIGGRAPH SYMPOSIUM ON GEOMETRY PROCESSING, v. 43, p. 31-40, Aachen, Alemanha, 2003.
- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E. Wavelets and multigrid. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 14, n. 2, p. 506-510, 1993.
- _____; _____; MCCORMICK, S. F. *A multigrid tutorial*, 2. ed. California: Siam, 2000.
- CHANG, Q.; HUANG, Z. Efficient algebraic multigrid algorithms and their convergence, *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 24, n. 2, p. 597-618, 2002.
- DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure and Appl. Math.*, v. 41, p. 909-996, 1988.
- FRASIER, M. W. *An Introduction to wavelets through linear algebra*. 1. ed. New York: IE-Springer-Verlag 6, 1999.
- HOPPE, R. H. W. Adaptive multigrid and domain decomposition methods in the computation of electromagnetic fields, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 168, p. 1-2, 2004.
- MORETTIN, P. A. *Ondas e ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas*. 1. ed. São Paulo: Edusp, 1999.

PEREIRA, F. H. *O método Multigrid Algébrico na resolução de sistemas lineares oriundos do método dos elementos finitos*, 2007. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade São Paulo, São Paulo, 2007.

_____.; NABETA, S. I. Uma nova abordagem baseada em *wavelets* para o método Multigrid Algébrico: Parte II – Algoritmo Paralelo. In: CNMAC – CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 30, Florianópolis, 2007.

_____.; VERARDI, S. L. L.; NABETA, S. I. A fast algebraic multigrid preconditioned conjugate gradient solver, In: COMPUMAG – CONFERENCE ON THE COMPUTATION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS, 15., 2005, Shenyang, China, 2005.

_____.; _____.; _____. A Wavelet-based Algebraic Multigrid preconditioner for sparse linear systems, *Applied Mathematics and Computation*, v. 182, p. 1098-1107, 2006.

SARKAR, T. K.; SALAZAR-PALMA, M.; MICHAEL, C. W. *Wavelet Applications in Engineering Electromagnetics*, 1. ed. Boston: Artech House, 2002.

TROTTEMBERG, U., OOSTERLEE, C. W., SCHULLER, A. *Multigrid*. 1. ed. London: Academic Press, 2001.

Recebido em 3 set. 2007 / aprovado em 3 out. 2007

Para referenciar este texto

PEREIRA, F. H.; NABETA, S. I. Uma nova abordagem baseada em wavelets para o método multigrid algébrico: parte I – Algoritmo seqüencial. *Exacta*, São Paulo, v. 5, n. 1, p. 93-103, jan./jun. 2007.

