

Modelos GARCH em ações financeiras: um estudo de caso

GARCH models in financial stocks: a case study



Paulo Siga Thomaz¹

Viviane Leite Dias de Mattos²

Luiz Ricardo Nakamura³

Andréa Cristina Konrath⁴

Gérson dos Santos Nunes⁵

¹Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG) (2016). Fez intercâmbio acadêmico, cursando um ano de sua graduação na Budapest University of Technology and Economics (BME) (2014), na cidade de Budapeste, pelo programa do governo Ciência sem Fronteiras. Possui mestrado em Modelagem Computacional pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG) (2019). Atualmente, cursa Licenciatura em Matemática pelo Centro Universitário Claretiano. Possui experiência com técnicas estatísticas aplicadas à qualidade, com ênfase na mensuração da satisfação, e estudos de séries temporais, principalmente séries econômicas e financeiras. Rio Grande, RS, Brasil.
paulosigathomaz@gmail.com

²Possui graduação em Engenharia Civil pela Universidade Católica de Pelotas (1978), mestrado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (1997) e doutorado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2004). Trabalhou como docente na área de Estatística na Universidade Católica de Pelotas e na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Atualmente é Professora Associada no Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande. Tem experiência na área de Engenharia de Produção, com ênfase em Garantia de Controle de Qualidade, atuando, principalmente, nos seguintes temas: séries temporais, qualidade, probabilidade e estatística, controle de processos e projeto de experimentos. Rio Grande, RS, Brasil.
viviane.leite.mattos@gmail.com

³Possui graduação em Estatística pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (2009), mestrado em Ciências (Estatística e Experimentação Agronômica) pela Universidade de São Paulo (2011) e doutorado em Ciências (Estatística e Experimentação Agronômica) pela Universidade de São Paulo (2016), com período "sanduíche" na London Metropolitan University (Londres, Reino Unido). Atualmente, é Professor Adjunto do Departamento de Informática e Estatística da Universidade Federal de Santa Catarina. Pesquisador dos grupos GAMLSS (www.gamlss.org) e "Grupo de Análise e Modelagem Estatística – GAME". Tem experiência na área de Probabilidade e Estatística, com ênfase em Probabilidade e Estatística Aplicadas, atuando, principalmente, nos seguintes temas: modelos aditivos generalizados para locação, escala e forma (GAMLSS), modelos semiparamétricos, modelagem estatística e análise multivariada. Florianópolis, SC, Brasil.
luiz.nakamura@ufsc.br

⁴Possui graduação em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade de Santa Cruz do Sul (2000), mestrado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2002) e doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina (2008). Trabalhou como docente na área de Estatística na Universidade do Vale do Itajaí, (UNIVALI), no período de março de 2007 a janeiro de 2009, e, no Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), no período de fevereiro de 2009 a julho de 2011, também na área de Estatística. Desde agosto de 2011, é Professora Associada na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), pertencendo ao Departamento de Informática e Estatística, na qual ministra disciplinas de Estatística na graduação e pós-graduação. Florianópolis, SC, Brasil.
andreack@gmail.com

⁵Possui graduação em Engenharia Elétrica pelo Instituto Federal Sul-Rio-Grandense (2014), com especialização em Docência no Ensino Superior pelo Centro Universitário Barão de Mauá (2015). Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC), na Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Atualmente, é professor EBTT do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Rio Grande, RS, Brasil.
gerson.sn85@gmail.com

Resumo

Este artigo tem por objetivo detalhar o protocolo de aplicação e avaliação dos modelos autorregressivos de heteroscedasticidade condicional generalizados (GARCH), com ênfase em especificar adequadamente a distribuição de probabilidade para os resíduos e o critério de avaliação da previsão. Com este intuito, aplicam-se modelos GARCH com distribuição normal e *t* de Student na modelagem da volatilidade da série de retornos das ações ABEV3. O melhor modelo seguindo a distribuição normal e o melhor seguindo a distribuição *t* de Student são executados para a previsão, em que os resultados são comparados com a volatilidade realizada, calculada a partir de retornos intradiários, e com os retornos absolutos. Os resultados evidenciam que o modelo GARCH(1,1) seguindo a distribuição *t* de Student possui a melhor performance, tanto no ajuste como na previsão. Além disso, os modelos possuem resultados significativamente melhores quando avaliados pelo critério da volatilidade realizada.

Palavras-chave: ABEV3. Heteroscedasticidade condicional. Séries financeiras. Volatilidade.

Abstract

This paper aims to detail the procedure of application and evaluation of Generalized Conditional Heteroskedasticity (GARCH) models, emphasizing the appropriate choice for the residual's distribution and the criterion of forecast evaluation. For this purpose, GARCH models with normal and Student's *t* distributions are used to model the volatility of the ABEV3 stock returns series. The best model following the normal distribution and the best model following the Student-*t* distribution are executed for the forecast, where the results are compared to the realized volatility, calculated from intraday returns, and to the absolute returns. The results show that the GARCH(1,1) following a Student-*t* distribution performs better in both fitting and forecasting. In addition, the models have significantly better forecast results when evaluated by the realized volatility criterion.

Keywords: ABEV3. Conditional Heteroskedasticity. Financial Series. Volatility.

1 Introdução

O crescimento do mercado financeiro, nas últimas décadas, tem feito com que o foco da econometria se volte cada vez mais às séries financeiras, com o objetivo de diminuir a incerteza por trás dos investimentos. Uma dificuldade encontrada, no entanto, é que os retornos de preços de ativos financeiros se caracterizam como passeios aleatórios, sendo de difícil previsão. Como consequência, os modelos econométricos tradicionais, como os da classe de autorregressivos de médias móveis (ARMA) (Box & Jenkins, 1970), são ineficientes em sua modelagem (Coelho, Santos, & Costa, 2008).

Entretanto, os retornos, apesar de, em geral, não serem autocorrelacionados, possuem variâncias dependentes e que tendem a oscilar mais suavemente. O interesse voltou-se, então, para a chamada volatilidade, definida como o desvio padrão condicional (Morettin, 2011). Estimar e prever esse parâmetro é importante, pois ele pode ser utilizado como *proxy* para o risco associado ao ativo financeiro, auxiliando na precificação de ações e estratégias de investimento.

Os modelos mais empregados para a modelagem da volatilidade são os modelos de heteroscedasticidade condicional. Eles foram introduzidos por Engle (1982), por meio do modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional (ARCH), originalmente com a intenção de modelar a inflação no Reino Unido. Bollerslev (1986), observando que os modelos ARCH ajustados ficavam muito complexos, generalizou o modelo ARCH, criando o modelo autorregressivo de heteroscedasticidade condicional generalizado (GARCH), mais parcimonioso que o modelo proposto por Engle. A ideia básica dessa classe de modelos é de que os retornos não são autocorrelacionados serialmente, mas a volatilidade depende de retornos passados a partir de uma função quadrática (Morettin, 2011).

No entanto, uma dificuldade no uso desses modelos é a de encontrar uma distribuição de probabilidade adequada para os resíduos. Em geral, as séries de retornos possuem caudas pesadas, com excesso de curtose, tornando suas distribuições bem afastadas da distribuição normal padrão (Engle & Patton, 2001). É importante, portanto, que a especificação do modelo incorpore essa característica. Por esse motivo, uma alternativa muito utilizada é propor para os resíduos uma distribuição *t* de *Student*, ou alguma distribuição especial para os modelos GARCH, como a distribuição de erro generalizada (GED) (Nelson, 1991), ou a distribuição *t* assimétrica (Fernandez & Stell, 1998).

Outro problema reside no que diz respeito à avaliação da previsão. Em geral, a relevância prática de um modelo na previsão é feita pela comparação dos resultados obtidos em relação às realizações do processo (Reis, Perobelli, Mattos, & Corrêa, 2013). No entanto, a volatilidade não é diretamente observável, o que torna a abordagem clássica de avaliação da previsão não diretamente aplicável. Alguns autores, entre eles Cumby, Figlewski e Hasbrouck (1993) e Jorion (1995), utilizaram os retornos absolutos e ao quadrado, para comparar com os resultados de volatilidade obtidos pelos

modelos GARCH, o que conduziu a resultados insatisfatórios, colocando em dúvida o viés prático dessa classe de modelos. Andersen e Bollerslev (1998) esclareceram essa questão, afirmando que o motivo do baixo desempenho desses modelos é que eles estavam sendo avaliados por um critério inadequado, visto que, apesar de os retornos absolutos, ou ao quadrado serem estimadores não-viesados da volatilidade, eles estão sujeitos a um elevado grau de ruído. Dito isso, os autores sugeriram construir uma medida de volatilidade mais robusta, conhecida como volatilidade realizada, a qual é calculada por meio de retornos intradiários. Os avanços computacionais e a recente maior disponibilidade de dados em alta frequência (DAF) tornaram possível a elaboração dessa medida (Reis *et al.*, 2013). No entanto, os DAF raramente estão disponíveis de forma gratuita, ou em longos períodos. Além disso, eles estão sujeitos a erros de digitação ou falta de sincronização. A vantagem em utilizar os modelos GARCH é que eles modelam a volatilidade a partir de retornos diários, de fácil obtenção.

Dados os pontos levantados, este artigo destina-se a detalhar, de forma prática, o protocolo de aplicação da classe de modelos GARCH, com ênfase na escolha da distribuição de probabilidade para os resíduos e na avaliação da previsão. Com essa finalidade, são utilizados modelos GARCH para estimar e prever a volatilidade das ações da empresa de bens de consumo AmBev (ABEV3).

O presente trabalho está estruturado da seguinte maneira. Na Seção 2, é apresentada a fundamentação teórica, discorrendo-se, brevemente, sobre algumas características dos retornos financeiros e dos modelos da família GARCH. Além disso, são apresentados alguns estudos relacionados, em que modelos GARCH tenham sido utilizados em séries financeiras. Na Seção 3, é apresentada a metodologia, mostrando as etapas de aplicação do modelo GARCH. Em seguida, na Seção 4, são expostos e discutidos os resultados obtidos com a aplicação dos modelos na série ABEV3. Por fim, na Seção 5, são apresentadas as considerações finais.

2 Fundamentação teórica

Nesta seção, descreve-se a fundamentação teórica. Primeiramente, são apresentadas algumas características das séries de retorno e dos modelos GARCH e, posteriormente, são descritos, brevemente, alguns estudos relacionados, envolvendo esses modelos.

2.1 Risco e retornos

O risco é a possibilidade de que um evento inesperado desfavorável ocorra, gerando um retorno inferior ao esperado ou até mesmo uma perda (Alexandrino, Santos, Angulo-Meza & Bordeaux-Rego, 2017). No contexto financeiro, esse conceito remete ao trabalho pioneiro de Markowitz (1952), que introduziu a chamada Teoria Moderna do Portfólio. Essa teoria estabelece que decisões envolvendo a escolha de investimentos devem ser tomadas com base na relação risco-

retorno, reduzindo o conceito de risco à variância ou desvio padrão em relação a uma determinada média. Segundo Reis *et al.* (2013), a partir de então, a questão levantada foi como mensurar o grau de variabilidade associado aos ativos financeiros. Devido a essa necessidade, surgiu, no contexto de finanças, a chamada volatilidade, que pode ser entendida como a probabilidade do preço de um ativo cair ou subir em um determinado período de tempo.

Segundo Oliveira e Rebelatto (2011), o risco de um investimento é formado por dois elementos: o risco sistemático, ou não diversificável, e o risco não sistemático, ou diversificável. O primeiro tipo é aquele que influencia um grande número de ativos, como o risco gerado por condições econômicas gerais, taxas de juros ou inflação. Já o risco não sistemático não está associado ao contexto global, mas sim a características inerentes a determinado ativo.

O principal objetivo na modelagem da volatilidade é, portanto, mensurar o risco associado a uma carteira de ativos. Nesse caso, os investidores estão mais interessados nos ganhos e perdas, devido a um determinado investimento, do que no preço do ativo financeiro em si. Por esse motivo, é comum utilizar a variação dos preços dos ativos na modelagem de séries financeiras.

Denotando o preço de um ativo como P_t e supondo que não houve dividendos pagos no período considerado, pode-se escrever a variação de preços entre os instantes t e $t - 1$ como $\Delta P = P_t - P_{t-1}$. Define-se, então, o retorno líquido simples como

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P}{P_{t-1}}, \quad (1)$$

em que R_t é chamado de taxa de retorno e é, geralmente, expresso em porcentagem. Se aplicarmos a transformação logarítmica na série de preços, denotando $p_t = \ln(P_t)$, define-se o log-retorno, ou simplesmente retorno, como

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}. \quad (2)$$

Segundo Tsay (2002), do ponto de vista estatístico, é mais interessante trabalhar com retornos, pois são livres de escala e, geralmente, possuem estacionariedade e ergodicidade. Além disso, os retornos raramente apresentam tendência ou sazonalidade, com exceção de retornos intradiários e séries de taxas de câmbio ou taxa de juros (Morettin, 2011).

Tsay (2002) resume algumas das principais características dos retornos financeiros:

- 1) as séries de preços, usualmente, não são estacionárias e se apresentam como passeios aleatórios, ao passo que as séries de retorno possuem quase sempre estacionariedade;

- 2) os retornos geralmente apresentam pouca ou nenhuma autocorrelação;
- 3) os retornos ao quadrado e absolutos apresentam, em geral, forte autocorrelação;
- 4) os retornos tendem a aparecer em aglomerados, ou seja, choques elevados são seguidos por choques elevados, ao passo que choques de menor intensidade são seguidos por choques menores;
- 5) a distribuição incondicional dos retornos apresenta, em geral, caudas mais pesadas do que a distribuição normal. Essa não-normalidade tende a diminuir, conforme o intervalo de tempo entre os retornos aumenta, portanto é provável que os retornos mensais se assemelhem mais à distribuição normal do que os retornos diários.

2.2 Estrutura básica dos modelos GARCH

Uma das primeiras aproximações do cálculo da volatilidade foi o modelo de Black-Scholes (Black & Scholes, 1973), criado com o objetivo de auxiliar na precificação de opções europeias. Apesar de relevante, por ser considerado o ponto de partida na mensuração da volatilidade, esse modelo possui uma grande desvantagem por considerar a variância condicional constante ao longo do tempo. Além disso, também é suposto que os preços seguem a distribuição normal.

Entretanto, a literatura reconhece que os preços raramente são normalmente distribuídos, como visto nos trabalhos de Lama, Jha, Paul e Gurung (2015), Luo, Paitore e Chatpatanasiri (2017) e Lai (2018). Além do mais, a instabilidade econômica não permite que a volatilidade seja considerada constante, ao longo do tempo, na maioria das situações (Reis *et al.*, 2013). Devido a isso, uma das abordagens mais comuns, atualmente, é calcular a volatilidade a partir de retornos diários por meio de modelos GARCH. Esses modelos consideram-na como uma medida não constante ao longo do tempo, além de permitirem flexibilidade na escolha de distribuições de probabilidade que melhor representem o conjunto de dados estudado.

Sendo r_t uma série de retornos, a média condicional e a variância condicional do processo são, respectivamente:

$$u_t = E(r_t | \mathfrak{I}_{t-1}) \quad (3)$$

e

$$h_t = Var(r_t | \mathfrak{I}_{t-1}), \quad (4)$$

em que $E(.)$ é o operador de valor esperado, $Var(.)$ o operador da variância e \mathfrak{I}_{t-1} representa toda a informação disponível até o instante $t - 1$. Em geral, para retornos financeiros, considera-se $u_t = 0$ e, portanto, a variância condicional pode ser aproximada como

$$h_t = E(r_t^2 | \mathfrak{F}_{t-1}). \quad (5)$$

Inspirado pelos modelos autorregressivos, Engle (1982) propôs o modelo ARCH (m), o qual considera a volatilidade como uma função quadrática dos retornos passados ao quadrado. O modelo pode ser definido como

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (6)$$

e

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{t-i}^2, \quad (7)$$

em que r_t e h_t correspondem, respectivamente, ao retorno e à volatilidade no t -ésimo tempo, enquanto m corresponde ao grau de defasagem do modelo. α_0 e α_i são os coeficientes do modelo e devem respeitar as condições $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, m - 1, \alpha_m > 0$. Os choques aleatórios (ε_t) devem ser independentes e identicamente distribuídos (i.i.d), com média zero e variância igual à unidade. Usualmente considera-se que $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ ou $\varepsilon_t \sim t_\nu$, em que ν é o número de graus de liberdade da distribuição t de Student (Tsay, 2002).

Observando que, em geral, o ajuste do modelo ARCH levava a defasagens de ordens elevadas, Bollerslev (1986) propôs uma generalização do modelo ARCH, introduzindo o modelo GARCH (m, n). Este modelo pode ser definido como

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (8)$$

e

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j h_{t-j} \quad (9)$$

em que n corresponde à ordem de defasagem das volatilidades passadas e os coeficientes do modelo devem respeitar as condições $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, m - 1, \alpha_m > 0, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, n - 1, \beta_n > 0$.

Para que o modelo GARCH seja válido, os resíduos não devem possuir autocorrelação ou heteroscedasticidade, e, também, devem seguir a distribuição de probabilidade especificada para os choques aleatórios ε_t (Morettin, 2011).

Em caso de presença de autocorrelação, a aproximação apresentada na equação (5) torna-se

inconsistente, visto que a modelagem da série de retornos requer uma equação para a média. Como o interesse é modelar apenas a volatilidade, uma alternativa muito utilizada é aplicar inicialmente um modelo ARMA para remover a dependência serial, e, então, aplicar o modelo GARCH nos resíduos, de maneira a estimar a volatilidade de forma mais consistente (Morettin, 2011). Sendo assim, na modelagem da volatilidade, r_t pode-se referir tanto aos retornos da série como aos resíduos de um modelo ARMA. A fórmula geral de um modelo ARMA pode ser descrita como

$$r_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (10)$$

em que c é uma constante, p é a ordem do processo autorregressivo e q é a ordem do processo de médias móveis. ϕ_i e θ_j são os coeficientes do modelo, representando, respectivamente, a parcela da autorregressão e de médias móveis.

2.3 Identificação dos modelos GARCH

Os critérios de informação são comumente utilizados com o objetivo de se escolher o modelo menos complexo e que leva à menor variância residual (Yip, Fan, & Chaing, 2013). A cada regressor adicional incluído no modelo é associada uma penalidade; se for menor que a diminuição da soma dos resíduos, o regressor deve ser incorporado ao modelo. Se a penalidade for maior que a redução na soma, então significa que a adição do regressor não é justificável. Em outras palavras, os critérios de informação são usados para definir qual dos modelos candidatos é mais parcimonioso e que, portanto, deverá levar a modelagens mais razoáveis. Dois critérios muito utilizados são o de Akaike e Schwarz.

O critério de informação de Akaike (AIC) (Akaike, 1973) é descrito pela equação:

$$AIC(p, q) = -2 \ln(\hat{\mathcal{L}}_{max}) + 2(m + n), \quad (11)$$

em que $\hat{\mathcal{L}}_{max}$ é o valor da máxima verossimilhança ajustada. Note que a primeira parcela da equação (11) se refere à adequação do processo, enquanto a segunda diz respeito à penalização devido ao aumento do número de parâmetros. Os parâmetros m e n podem ser substituídos por p e q quando estivermos considerando um modelo ARMA(p, q).

Já o critério de informação de Schwarz (SBC) ou Bayesiano (BIC) (Schwarz, 1978) é dado por

$$BIC(p, q) = -2 \ln(\hat{\mathcal{L}}_{max}) + (m + n) \ln T \quad (12)$$

O objetivo, portanto, é definir as ordens de defasagem que minimizem os critérios de informação, o que nos levará ao modelo mais parcimonioso.

2.4 Estimação dos modelos GARCH

A estimação dos modelos GARCH consiste em definir os parâmetros $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ e β_1, \dots, β_j . Isso é feito geralmente pelo método da máxima verossimilhança, em que a ideia central é estimar um vetor de parâmetros populacionais $\psi = (c; \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n)$ que maximiza a probabilidade de a amostra pertencer a uma determinada distribuição especificada. Considerando uma amostra T grande e supondo normalidade dos choques aleatórios (ε_t), o logaritmo da função de verossimilhança para um modelo GARCH(m,n) é dado por

$$\ln f(r_{m+1}, \dots, r_T | \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n; r_1, \dots, r_m) = -\frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^T \frac{r_t^2}{h_t} \quad (13)$$

Em alguns casos, no entanto, é mais apropriado assumir as inovações ε_t como seguindo a distribuição t de Student, com o objetivo de modelar melhor as caudas pesadas das séries financeiras (Tsay, 2002). Considerando t_ν como uma distribuição t de Student com ν graus de liberdade e que $\varepsilon_t \sim t_\nu$, o logaritmo da função de verossimilhança para um modelo GARCH(m,n) é definido como

$$\begin{aligned} \ln f(r_{m+1}, \dots, r_T | \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n; \nu; r_1, \dots, r_m) \\ = T \ln \left[\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi(\nu-2)} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(h_t) \\ - \frac{\nu+1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left[1 + \frac{r_t^2}{h_t(\nu-2)} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a usual função Gamma e $\nu > 2$. O valor dos graus de liberdade ν pode ser definido *a priori*, geralmente entre três e seis, ou estimado conjuntamente com a função de verossimilhança (Tsay, 2002).

2.5 Previsão com modelos GARCH

As previsões com modelos GARCH(m,n) são obtidas de forma recursiva. Assim, supondo um modelo GARCH(1,1), a previsão para um período à frente, assumindo a origem da previsão em L , é

dada por

$$h_L(1) = \alpha_0 + \alpha_1 r_L^2 + \beta_1 h_L, \quad (15)$$

em que r_L e h_L são conhecidos no tempo L . A previsão para múltiplos passos à frente, quando $L > 1$, é definida por

$$h_L(L) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)h_L(L - 1) \quad (16)$$

Em modelos clássicos de séries temporais, como é o caso dos modelos ARMA, costuma-se calcular os resíduos a partir dos valores observados da amostra de validação e, então, computar os erros de previsão. Entretanto, a volatilidade é uma medida latente, tornando esta abordagem não aplicável de forma direta, pois é necessário, primeiramente, escolher um *proxy* para a volatilidade (Andersen & Bollerslev, 1998). Uma abordagem intuitiva consiste em utilizar os retornos absolutos ou ao quadrado para avaliar a previsão, visto que os modelos GARCH estimam a variância condicional a partir dos retornos.

No entanto, embora o quadrado dos retornos forneça uma estimativa não-viesada para a volatilidade, é possível que ele venha a produzir medições com ruídos elevados, devido ao erro ε_t , como mostrado na equação (6) (Reis *et al.*, 2013). De fato, conforme mencionado por Andersen e Bollerslev (1998), esse componente apresenta elevado grau de variação de observação para observação em relação à volatilidade (h_t), tornando grande parte da variação do retorno ao quadrado atribuível aos choques aleatórios (ε_t). Em virtude disso, os modelos GARCH podem apresentar desempenho pobre quando julgados pelos critérios mencionados.

É imprescindível, portanto, que seja escolhido um *proxy* adequado para representar a volatilidade real. Uma alternativa para quando apenas dados diários estão disponíveis, é calcular a volatilidade diária pelo estimador de Parkinson ou volatilidade de Garman-Klass (Garman & Klass, 1980). Uma abordagem mais adequada, segundo Andersen e Bollerslev (1998), é calcular a volatilidade realizada a partir de retornos intradiários, que fornece uma medida mais robusta da volatilidade. Os retornos intradiários podem ser calculados como

$$r_{d,m} = p_{d,m} - p_{d,m-1}, \quad m = 2, \dots, M, \quad d = 1, \dots, D, \quad (17)$$

em que os índices d e m se referem, respectivamente, ao dia e ao número de observações. A chamada variância realizada no dia d é dada pela equação

$$VR_d = r_{d,1}^2 + \sum_{m=2}^M r_{d,m}^2, \quad d = 1, \dots, D, \quad (18)$$

em que $r_{d,1} = p_t - p_{t-1}$ é o chamado retorno *overnight*. Finalmente, a volatilidade realizada é dada por

$$VOLR_d = \sqrt{VR_d}. \quad (19)$$

Para avaliar a previsão, não existe um critério único na literatura. Alguns autores, como Santos e Ziegelmann (2012), utilizaram o teste de Diebold e Mariano (1995), enquanto outros, como Luo *et al.* (2017), utilizaram o R^2 da regressão de Mincer-Zarnowitz (Mincer & Zarnowitz, 1969). Outra abordagem muito comum é calcular os erros de previsão, como feito no trabalho de Reis *et al.* (2013).

2.6 Estudos relacionados

Diversos estudos já foram conduzidos com a aplicação de modelos GARCH em séries temporais. Esta seção se destina a descrever brevemente alguns deles.

Santos e Ziegelmann (2012) avaliaram o desempenho de modelos GARCH e modelos aditivos semiparamétricos na estimação e previsão da volatilidade em períodos de crise, por meio de simulações de Monte Carlo e com diferentes períodos de tempo da série de retornos do IBOVESPA. As simulações foram realizadas considerando dois processos geradores de dados, um baseando-se nos quadrados dos resíduos, e outro, nos resíduos absolutos. Os modelos GARCH apresentaram performance superior no primeiro caso. No entanto, foram superados pelos modelos aditivos semiparamétricos, quando o processo gerador dos dados se baseou nos resíduos absolutos. Quanto à aplicação no IBOVESPA, ambos os modelos apresentaram performance similar pelo teste de Diebold-Mariano.

Simões, Klotzle, Pinto e Levrini (2012) avaliaram e compararam o desempenho dos modelos GARCH, GARCH fracionário integrado (FIGARCH) e ARMA fracionário integrado (ARFIMA) no ajuste e previsão de uma série de preços de soja com dados de alta frequência. Os modelos FIGARCH e ARFIMA são modelos criados com o objetivo de modelar séries temporais de memória longa (dependência temporal persistente). Foi observado que o modelo GARCH(1,1) e ARFIMA obtiveram os melhores resultados. Como conclusão, os autores afirmam que, no presente estudo, o modelo GARCH(1,1) apresenta um surpreendente poder de previsão quando aplicado em dados intradiários.

Em outra pesquisa, Reis *et al.* (2013) aplicaram modelos da família GARCH e modelos ARIMA na previsão da volatilidade das ações da Petrobrás. A ideia principal foi de comparar os resultados

obtidos pela volatilidade implícita e explícita com a volatilidade realizada calculada com retornos intradiários. Com esse objetivo, primeiramente foram ajustados modelos GARCH com os retornos diários, e a volatilidade prevista foi comparada com a volatilidade realizada. Em um segundo momento, com dados intradiários de três anos, foi ajustado um modelo ARIMA diretamente na volatilidade realizada e, assim, foram computados os erros de previsão da forma tradicional. Como conclusão, os modelos ARIMA tiveram performance superior, pois modelaram a volatilidade de forma direta. No entanto, esse tipo de abordagem nem sempre é possível, devido à dificuldade em se obter dados intradiários.

Em estudo desenvolvido na Malásia, Lim e Sek (2013) aplicaram modelos GARCH simétricos e assimétricos no mercado financeiro. Como houve uma crise econômica no país no ano de 1997, o conjunto de dados foi dividido em três partes: antes da crise econômica, durante a crise e após a crise. Os resultados evidenciaram diferentes performances dos modelos dependendo do período, com os modelos GARCH simétricos tendo performance superior nos períodos de economia estável, enquanto os modelos assimétricos obtiveram melhor desempenho durante a crise econômica. Ressalta-se, no entanto, que os autores utilizaram retornos absolutos para avaliar a previsão.

Angélico e Oliveira (2016) conduziram uma pesquisa com o objetivo de modelar a volatilidade estatística do Índice Bovespa (IBOVESPA) e do Índice Dow Jones, por meio de modelos ARMA-GARCH. Como complemento, os autores também buscaram averiguar a existência de equilíbrio de longo prazo e procedência temporal entre os índices, com o uso de testes de co-integração e de causalidade. Os resultados evidenciaram que o índice brasileiro possui maior volatilidade e há ausência de equilíbrio de longo prazo entre as duas variáveis.

Luo *et al.* (2017) utilizaram modelos GARCH simétricos e assimétricos com inovações normais e seguindo a distribuição *t* de Student, com o objetivo de prever a volatilidade no índice do mercado de ações da bolsa de Xangai. Para verificar o desempenho na previsão, foi utilizada a regressão de Mincer-Zarnowitz, evidenciando que os modelos seguindo a distribuição *t* de Student foram capazes de prever melhor a volatilidade do que os modelos seguindo a distribuição normal.

Com o objetivo de investigar a persistência na variância e a presença de quebras estruturais, Oliveira e Araújo (2018) aplicaram o modelo GARCH(1,1) e o modelo de variância puro *Markov Switching* (MS) na série de preços da manga e uva exportadas da Bahia. Como resultados, os autores apontam que as séries analisadas não apresentam variância persistente nem quebras estruturais. Além disso, o modelo GARCH(1,1) foi capaz de modelar melhor a heteroscedasticidade na série da uva, ao passo que o modelo MS obteve melhores resultados na série da manga.

Por fim, Jiang, Li e Li (2018) utilizaram modelos GARCH com a introdução de medidas de risco, computadas a partir de retornos intradiários, na equação de estimação da volatilidade. A modificação no modelo resultou, segundo os autores, em melhorias significativas na estimação e previsão da volatilidade do índice americano E-mini S&P500. Além disso, os achados do estudo evidenciaram que

a volatilidade futura está fortemente associada com os riscos do tempo presente.

3 Metodologia

Como este trabalho tem o objetivo de modelar a volatilidade das ações da empresa AmBev, os preços foram coletados a partir da base de dados do Infomoney (Infomoney, 2018). A série de preços tem frequência diária e data de 02/01/2007 até 11/04/2018, totalizando 2.795 observações para o ajuste. O período compreendido entre 12/04/2018 e 12/05/2018 é utilizado para a previsão, totalizando 21 observações para a amostra de validação. Para esse último período, foram computados retornos intradiários de 15 em 15 minutos para calcular a volatilidade realizada para cada dia e, então, comparar os valores com os obtidos pelo modelo GARCH. A metodologia deste estudo segue, portanto, as seguintes etapas:

1) *Cálculo dos retornos*: calculam-se os retornos a partir da série de preços, por meio da equação (2).

2) *Verificação da estacionariedade e autocorrelação*: para verificar se a série de retornos é estacionária e se possui autocorrelação, são construídos os gráficos da função de autocorrelação (FAC) e função de autocorrelação parcial (FACP). As conclusões sobre a estacionariedade e autocorrelação obtidas pelas funções são, então, confirmadas por testes estatísticos, sendo eles, respectivamente, o teste Aumentado de Dickey-Fuller (ADF) (Dickey & Fuller, 1981) e o teste de Ljung-Box (Ljung & Box, 1978). Este último é executado para as 20 primeiras defasagens, visto que, segundo Morettin (2011), é um número suficiente para verificar a autocorrelação. Entretanto, para o teste ADF, é necessário um rigor maior sobre a escolha da ordem de defasagem para sua execução (Ng & Perron, 2001). Neste estudo, inicia-se com a fixação de um valor máximo pelo critério proposto em Schwert (1989), que utiliza a função

$$p_{max} = int \left[12. \left(\frac{T}{100} \right)^{\frac{1}{4}} \right], \quad (20)$$

em que T é o número total de observações da série temporal. A partir deste p_{max} , executa-se o teste ADF, verificando-se a significância do último coeficiente estimado na regressão. Se este coeficiente for significativo, o resultado é levado em consideração, caso contrário, o teste é executado para o número de defasagens p_{max-1} . Este processo é realizado de forma iterativa até que o último coeficiente do modelo de regressão seja significativo.

Com o número de defasagens definido, é adotado o procedimento proposto por Schmidt e Lima (2004), ao sugerirem que o teste seja realizado considerando tendência e constante. Quando a primeira for significativa, ambas são consideradas no modelo; se a tendência não for significativa,

apenas a constante é acatada, sendo o teste realizado novamente; se esta for significativa, ela é considerada, se não, é retirada.

3) *Determinação das ordens do modelo ARMA* – se houver presença de autocorrelação, é aplicado um modelo ARMA(p,q) com o objetivo de removê-la. Para a determinação das ordens p e q , são testadas todas as combinações possíveis de modelos ARMA até as ordens (5,5) e, então, é escolhido como candidato o modelo que apresenta os menores critérios de informação de Akaike (AIC) (Akaike, 1973) e Schwarz (BIC) (Schwarz, 1978). Com o modelo definido, aplica-se o teste de Ljung-Box nos resíduos para verificar se não há mais autocorrelação; se esta permanecer deve-se aumentar as ordens p e q .

4) *Verificação da heteroscedasticidade condicional* – verifica-se se os retornos ou os resíduos do modelo ARMA apresentam variâncias dependentes (efeito ARCH), de modo a justificar o emprego de um modelo GARCH. Com este intuito, são verificadas a FAC e FACP dos retornos ou resíduos do modelo ARMA ao quadrado. A análise visual é corroborada pela aplicação dos testes estatísticos ARCH-LM (Engle, 1982) e Ljung-Box nos retornos ao quadrado.

5) *Determinação das ordens do modelo GARCH* – as ordens do modelo GARCH também são determinadas de forma iterativa, buscando-se as ordens m e n que minimizem os critérios de informação AIC e BIC. Os modelos são especificados seguindo a distribuição normal e a t de Student, conforme equações (13) e (14).

6) *Diagnóstico dos resíduos do modelo GARCH* – como a volatilidade não é diretamente observável, não se pode computar os resíduos de um modelo GARCH a partir dos valores observados, como comumente é feito na modelagem com os modelos ARMA. A solução é utilizar os chamados resíduos padronizados (\tilde{r}_t), dado por

$$\tilde{r}_t = \frac{r_t}{\sqrt{h_t}}. \quad (21)$$

Checa-se se os resíduos padronizados apresentam ausência de autocorrelação e se não possuem heteroscedasticidade condicional com os testes já mencionados anteriormente. No caso de presença de heteroscedasticidade condicional, aumentam-se as ordens de defasagem m e n . Para verificar se os resíduos seguem a distribuição de probabilidade especificada, utiliza-se o gráfico quantil-quantil, o qual consiste em comparar os quantis da distribuição dos resíduos com os quantis teóricos da distribuição especificada para o modelo. Na verificação da normalidade, ainda é aplicado o teste de Jarque-Bera (Jarque & Bera, 1987).

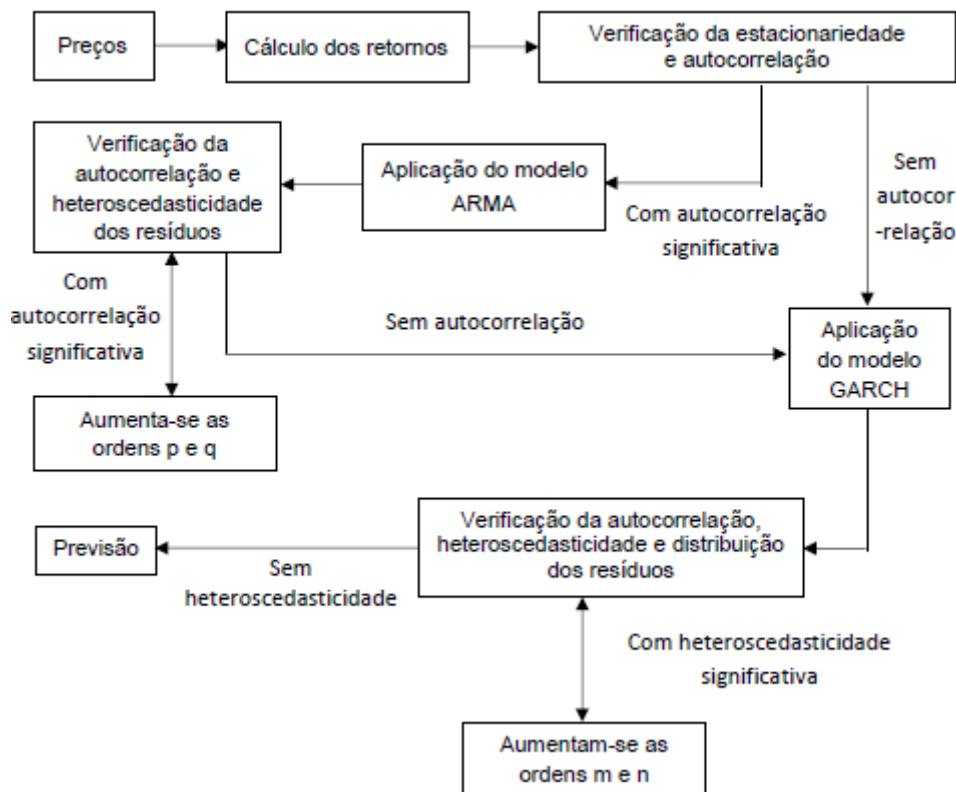
7) *Previsão* – foi utilizada a previsão um passo à frente, também conhecida como previsão estática. Este método consiste em, após a escolha do modelo, executar a previsão um período à frente e computar o erro. Então, move-se a origem da previsão a um período à frente, incorporando o

retorno do dia correspondente à equação da previsão, mantendo os parâmetros do modelo fixos. Após, executa-se a previsão novamente um passo à frente e computa-se outra vez o erro. Esse procedimento é repetido até o final da amostra de validação.

Para avaliar a previsão, são utilizados os retornos absolutos e a volatilidade realizada, com o objetivo de comparar os resultados obtidos com os dois critérios. A volatilidade realizada é computada a partir de retornos intradiários a cada 15 minutos, utilizando a equação (19). Compara-se o desempenho dos modelos na previsão por meio do erro médio absoluto (MAE), da raiz do erro quadrático médio (RMSE) e do erro médio percentual absoluto (MAPE), calculados com os dois critérios de comparação.

Toda a análise realizada neste estudo é feita com o software R (R Core Team, 2018) com o uso, principalmente do pacote de funções *rugarch*. Além deste, são utilizados os pacotes *tseries*, *Atsa*, *FinTS*, *urca*, *forecast*, *PerformanceAnalytics*, *car* e *SurvMisc*. A Figura 1 apresenta um fluxograma que resume a metodologia utilizada.

Figura 1 - Fluxograma da metodologia utilizada no estudo



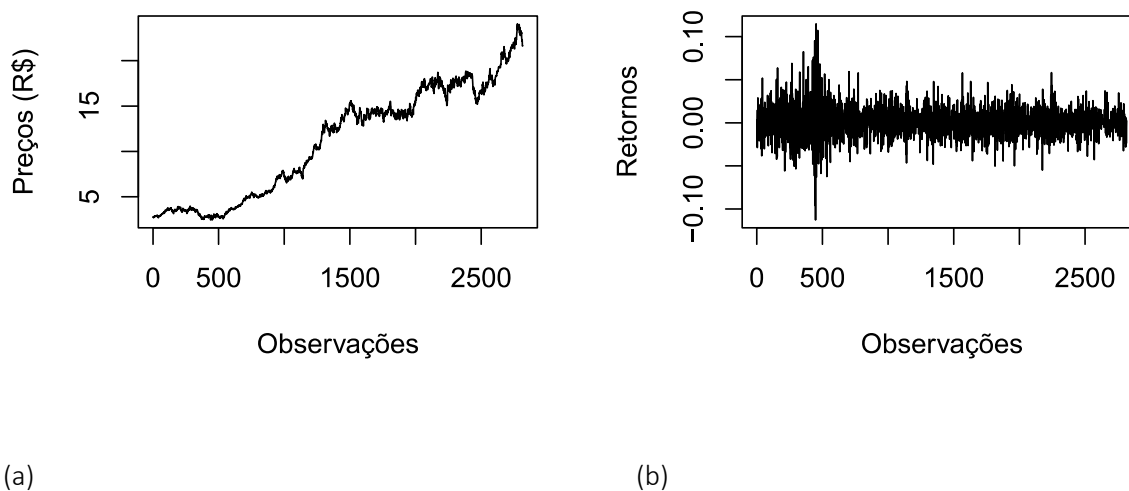
Fonte: Elaborada pelos autores.

4 Resultados e discussões

4.1 Análise exploratória dos dados

Na Figura 2, são apresentados os gráficos em linha da série de preços ABEV3 e seus retornos. Nota-se que os preços aparentam ser não estacionários, com variância tendendo ao infinito, ao passo que, na série de retornos, a variância se encontra estabilizada e há indícios de que os retornos são estacionários com média zero.

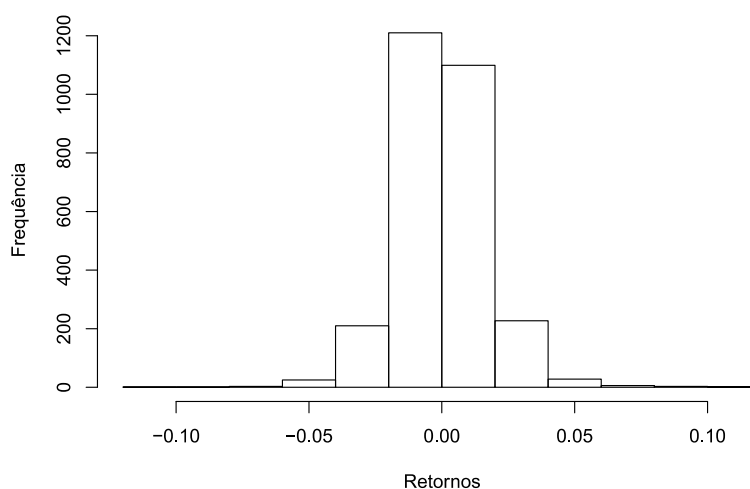
Figura 2 - Série de preços (a) e retornos das ações da empresa AmBev (ABEV3) (b)



Fonte: Elaborado pelos autores com base nos dados de ABEV3.

Na Figura 3, é apresentado o histograma da série de retornos da ABEV3, sendo possível observar sua aparência leptocúrtica com distribuição aproximadamente simétrica. Essa análise visual é confirmada pelos resultados da Tabela 1, que demonstram algumas estatísticas descritivas da série.

Figura 3 - Histograma dos retornos da série ABEV3



Fonte: Elaborada pelos autores.

Tabela 1 - Estatísticas descritivas dos retornos da série ABEV3

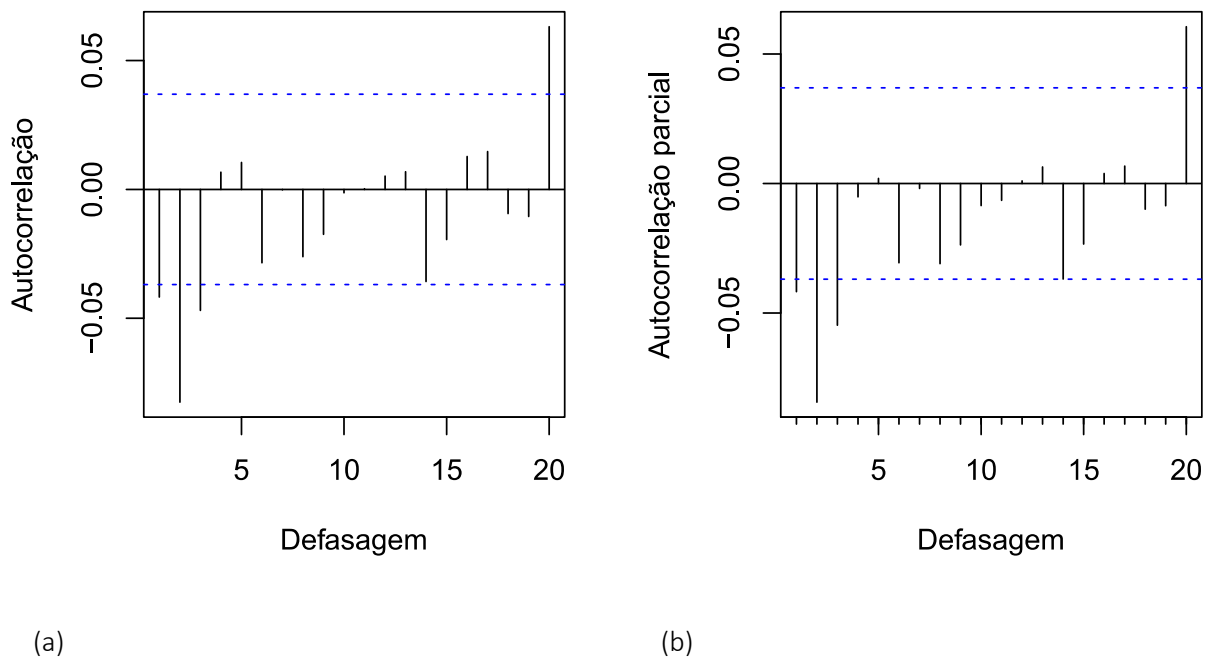
Curtose	Média	Assimetria	Desvio Padrão
4,2219	0,0008	0,1140	0,0166

Fonte: Elaborada pelos autores.

4.2 Avaliação da estacionariedade e autocorrelação

A Figura 4 apresenta a FAC e a FACP dos retornos da série ABEV3 para as 20 primeiras defasagens. Nota-se que, em ambas as funções, as três primeiras autocorrelações são significativas, indicando que talvez seja necessária a aplicação prévia de um modelo ARMA para remover a autocorrelação serial. Entretanto, como essa autocorrelação significativa não é persistente, pode-se inferir pelos gráficos que a série possivelmente é estacionária.

Figura 4 - FAC (a) e FACP (b) dos retornos da série ABEV3



Fonte: Elaborada pelos autores.

De forma a confirmar os achados indicados na Figura 4, foram executados o teste de estacionariedade ADF e Ljung-Box, ambos apresentando valor $p < 0,0001$, sendo possível rejeitar a hipótese nula. Pelo resultado do teste ADF, encontram-se evidências de que a série é estacionária, ao passo que, pelo teste de Ljung-Box, encontram-se evidências de presença de autocorrelação na série de retornos. Os resultados indicam, portanto, que é necessária a aplicação prévia de um modelo ARMA, antes do uso do modelo GARCH.

4.3 Aplicação e diagnóstico dos resíduos do modelo ARMA

A Tabela 2 apresenta os valores dos critérios de informação AIC e BIC, bem como os valores p dos testes de Ljung-Box, para os resíduos e resíduos ao quadrado, e do teste ARCH-LM, para os três melhores modelos ARMA identificados neste estudo. É possível observar que o modelo ARMA(1,2) possui os menores critérios de informação AIC e BIC (-15.110,98 e -15.081,29, respectivamente) e há evidências de que foi capaz de remover a autocorrelação significativa na série. Além disso, o resultado do teste ARCH-LM para esse modelo indica que há presença de heteroscedasticidade condicional, que é o que se busca modelar com o modelo GARCH.

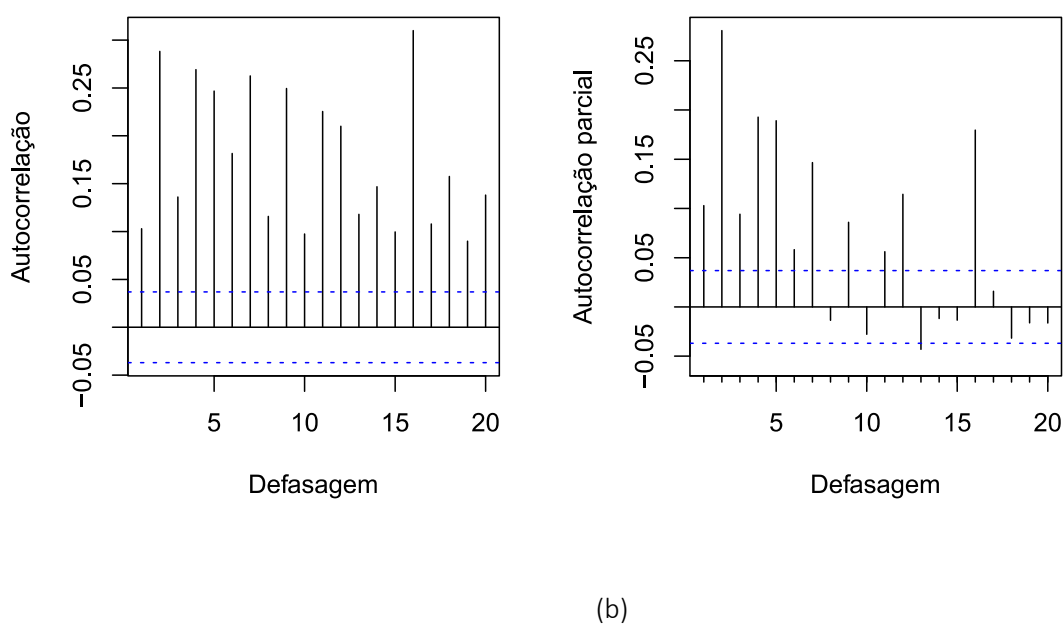
Outra forma de verificar a presença de heteroscedasticidade condicional é visualizar os gráficos da FAC e FACP da série de resíduos ao quadrado do modelo ARMA – Figura 5, observando que existe dependência entre as variâncias. Esta correlação é persistente mesmo para defasagens elevadas. Portanto, a análise visual está de acordo com os resultados obtidos na Tabela 2.

Tabela 2 - Critérios de informação e diagnóstico dos resíduos do modelo ARMA(1,2)

Modelo	AIC	BIC	Ljung-Box (r_t)	Ljung-Box (r_t^2)	ARCH-LM
ARMA(1,2)	-15.110,98	-15.081,29	0,2169	<0,0001	<0,0001
ARMA(2,1)	-15.110,94	-15.081,22	0,2152	<0,0001	<0,0001
ARMA(2,2)	-15.108,96	-15.073,34	0,2152	<0,0001	<0,0001

Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 5 - FAC (a) e FACP (b) da série de resíduos ao quadrado do modelo ARMA



Fonte: Elaborada pelos autores.

4.4 Aplicação e diagnóstico dos resíduos do modelo GARCH

Com a confirmação de estacionariedade e a remoção da autocorrelação da série de retornos, parte-se para a aplicação do modelo GARCH com o objetivo de estimar a volatilidade. Na Tabela 3, são apresentados os três melhores modelos de cada distribuição em relação ao ajuste, escolhidos com o processo de minimização dos critérios de informação. É possível observar que o modelo GARCH(2,1) com distribuição normal é o mais parcimonioso em relação aos demais especificados com a distribuição normal. No entanto, ele é superado pelo GARCH(1,1) com distribuição *t* de Student, o qual possui os menores critérios de informação dentre todos os modelos deste estudo.

Tabela 3 - Valores dos critérios de informação dos modelos GARCH

Modelo	AIC	BIC
GARCH(1,1) Normal	-5,5444	-5,5296
GARCH(2,1) Normal	-5,5541	-5,5371
GARCH(1,2) Normal	-5,5540	-5,5370
GARCH(1,1) <i>t</i> de Student	-5,5829	-5,5659
GARCH(2,1) <i>t</i> de Student	-5,5822	-5,5630
GARCH(1,2) <i>t</i> de Student	-5,5822	-5,5630

Fonte: Elaborada pelos autores.

Como um dos objetivos deste estudo é comparar os modelos GARCH especificados com distribuição normal e com distribuição *t* de Student, os dois melhores modelos de cada distribuição são avaliados em relação aos resíduos para, posteriormente, serem executados na previsão. A Tabela 4 apresenta o diagnóstico dos resíduos para esses modelos. Os resultados indicam que ambos foram capazes de produzir resíduos sem autocorrelação e sem heteroscedasticidade condicional. No entanto, pelo teste de Jarque-Bera, há evidências de que o modelo GARCH(2,1), especificado com a distribuição normal, não foi capaz de gerar resíduos seguindo essa distribuição.

Tabela 4 - Diagnóstico dos resíduos dos modelos GARCH selecionados

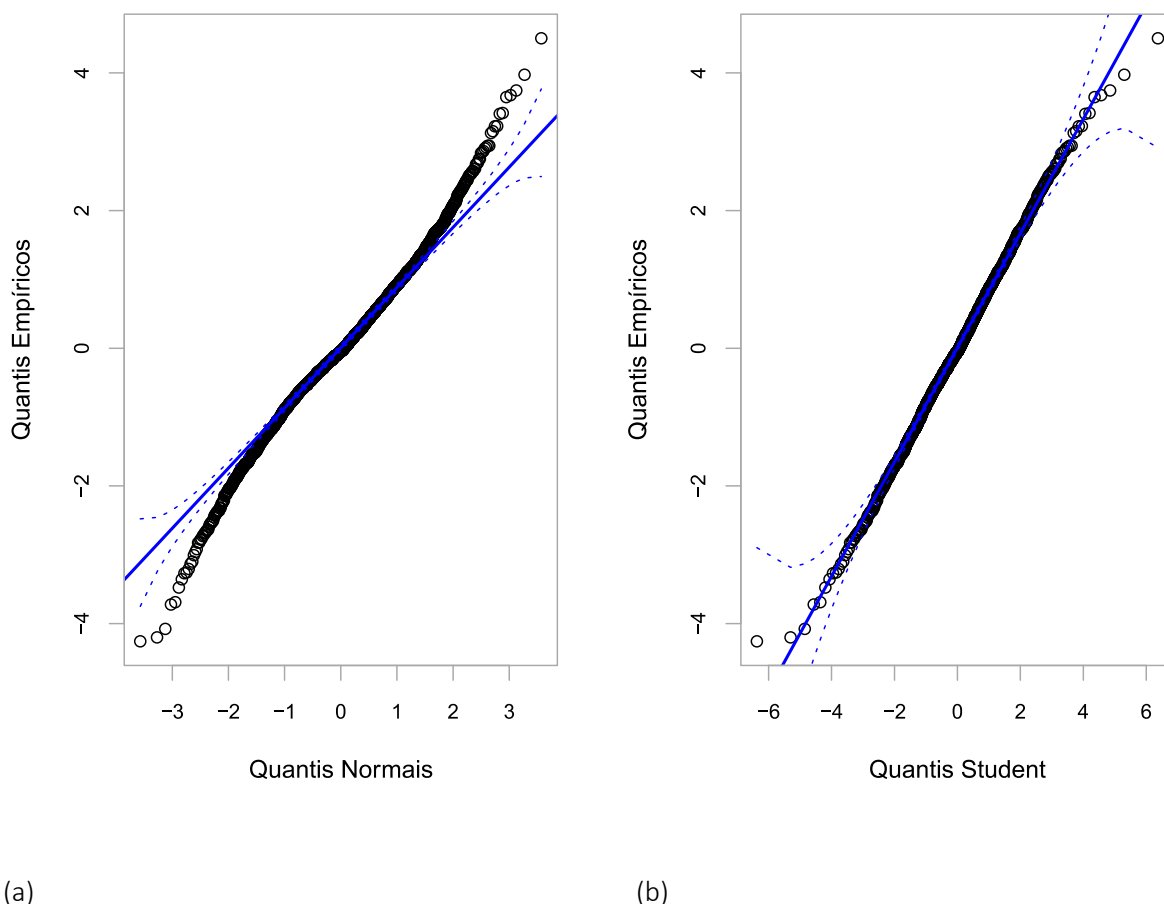
Modelo	Ljung-Box (r_t)	Ljung-Box (r_t^2)	ARCH-LM	Jarque-Bera
GARCH(2,1) Normal	0,6779	0,7228	0,7462	<0,0001
GARCH(1,1) <i>t</i> de Student	0,7629	0,7151	0,7434	-

Fonte: Elaborada pelos autores.

Dando continuidade ao diagnóstico dos resíduos, a Figura 6 apresenta os gráficos quantil-quantil com envelope simulado de 95% do modelo GARCH(2,1) seguindo a distribuição normal e do modelo GARCH(1,1) seguindo distribuição *t* de Student com sete graus de liberdade. Pela análise

gráfica, percebe-se que os resíduos do primeiro modelo aparentam se afastar consideravelmente da distribuição normal nas extremidades, ficando fora do intervalo simulado. Já o modelo GARCH(1,1) com distribuição t de *Student* apresenta resíduos mais adequados à distribuição especificada, com a maior parte dos pontos se encontrando em cima da reta e, até mesmo os pontos mais afastados, nas caudas da distribuição, continuam dentro do envelope simulado de 95%.

Figura 6: Gráficos quantil-quantil dos resíduos do modelo GARCH(2,1) especificado com a distribuição normal (a) e dos resíduos do modelo GARCH(1,1) para a distribuição t de *Student* com sete graus de liberdade (b)



Fonte: Elaborada pelos autores.

4.5 Previsão com os modelos GARCH

A Tabela 5 apresenta as medidas de erro MSE, RMSE e MAPE para os modelos, utilizando a volatilidade realizada e os retornos absolutos como critérios de comparação. É possível observar que o uso da volatilidade realizada como *proxy* da volatilidade observada aumenta significativamente o desempenho dos modelos, mostrando que os GARCH podem ter bom desempenho na previsão quando julgados pelo parâmetro adequado. Nota-se, também, que o modelo GARCH(1,1) especificado com a distribuição t de *Student* apresenta erros de previsão menores que o GARCH de resíduos normais, demonstrando que a especificação adequada da distribuição dos resíduos pode melhorar os

resultados da previsão. Esses achados concordam com outros estudos como o de Mhmoud e Dawalbait (2015) e Luo, *et al.* (2017), em que os modelos seguindo a distribuição *t* de Student se mostraram superiores aos de distribuição normal, tanto no ajuste como na previsão.

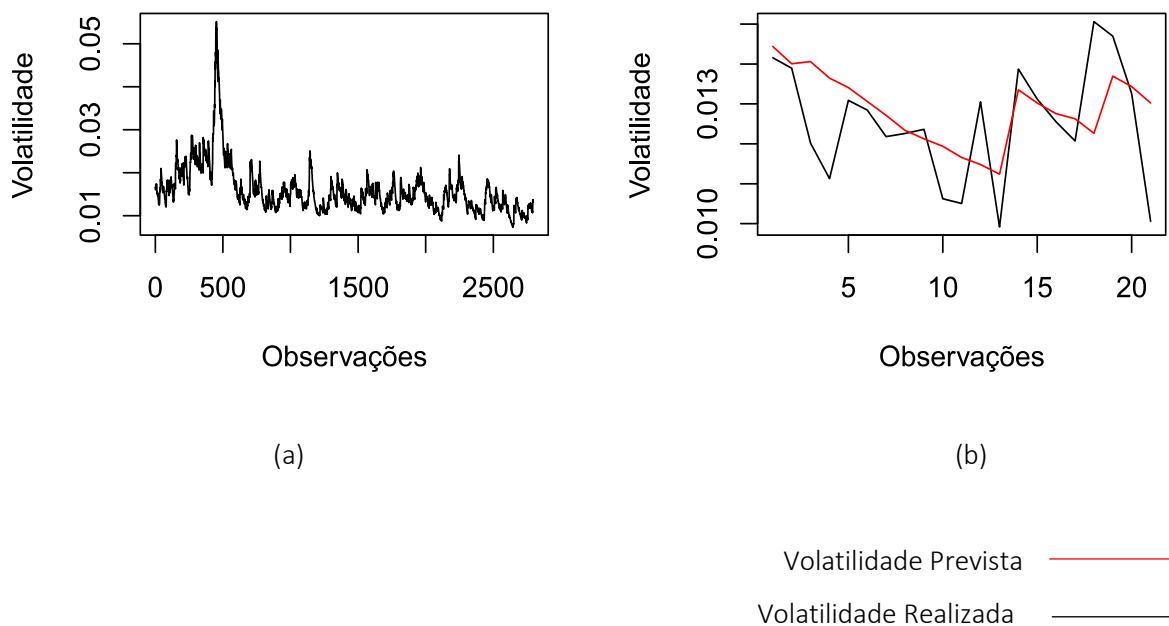
Tabela 5 - Resultados da previsão para os modelos GARCH(2,1) – Normal e GARCH(1,1) – Student

Modelo	Volatilidade Realizada			Retornos Absolutos		
	MAE	RMSE	MAPE(%)	MAE	RMSE	MAPE(%)
GARCH(2,1) Normal	0,00106	0,00139	9,03469	0,00812	0,00875	65,05370
GARCH(1,1) <i>t</i> de Student	0,00953	0,00132	8,04999	0,007948	0,008550	63,36113

Fonte: Elaborada pelos autores.

Conclui-se, portanto, que o modelo GARCH(1,1) seguindo a distribuição *t* de Student é o melhor dentre os utilizados neste estudo. A Figura 7 apresenta os gráficos da volatilidade estimada pelo modelo no ajuste e na previsão, sendo que esta última é comparada com os valores da volatilidade realizada.

Figura 7 - Volatilidade estimada (a) e volatilidade prevista pelo modelo GARCH(1,1) *t* de Student (b)



Fonte: Elaborada pelos autores.

5 Considerações finais

O presente trabalho se propôs a detalhar, sistematicamente, a abordagem prática para a aplicação e avaliação do desempenho de um modelo GARCH na modelagem da volatilidade de um ativo financeiro. Complementarmente, objetivou-se comparar os modelos especificados com

diferentes funções de probabilidade: normal e t de *Student*, e avaliar o desempenho na previsão utilizando dois critérios: a volatilidade realizada e os retornos absolutos.

Os achados deste estudo demonstram que o uso da distribuição t de *Student* resultou em um melhor desempenho, tanto no ajuste como na previsão. Isso é explicado pelo fato de as séries financeiras possuírem, em geral, caudas consideravelmente mais pesadas que a distribuição normal. Além disso, a especificação adequada para a distribuição dos resíduos não só tornou a modelagem mais consistente, validando os pressupostos teóricos do modelo, como também melhorou os resultados da previsão. Essa constatação mostra que, mesmo do ponto de vista prático, é importante que a distribuição de probabilidade do modelo seja corretamente especificada.

Em relação à previsão, os modelos, quando avaliados pelo critério da volatilidade realizada, apresentaram ganho de performance significativo. Esse fato demonstra que os retornos absolutos nem sempre são um bom critério de avaliação, visto que estão sujeitos a ruídos muito elevados. A dificuldade, no entanto, é que os DAF ainda não são de fácil obtenção.

Finalizando, espera-se que este estudo possa auxiliar estudantes, investidores e pesquisadores na obtenção de uma correta especificação de modelos GARCH. Pretende-se, em trabalhos futuros, dar continuidade a esta pesquisa com a inclusão dos modelos assimétricos na análise da volatilidade dos retornos da série ABEV3.

Referências

- Akaike, H. (1973). Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. *2nd Proceedings of the International Symposium on Information Theory*, Budapeste, Hungria, 267-281, 2.
- Alexandrino, F.Q.L., Santos dos, R.A.B. dos, Angulo-Meza, L., & Bordeaux-Rego, R. (2017). Utilização da análise envoltória de dados (DEA) na composição de carteira de investimento diversificada e eficiente. *Revista Produção Online*, 17(2), 507-532.
- Andersen, T.G., & Bollerslev, T. (1998). Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. *International Economic Review*, 39, 885-905.
- Angélico, D.G., & Oliveira de, S.C. (2016). Modelo ARMA-GARCH e precedência temporal entre índices acionários. GEPROS. *Gestão da Produção, Operações e Sistemas*, 11(1), 97-112.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 635-654.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-372.
- Box, G.E.P., & Jenkins, G. (1970). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. San Francisco: Holden-Day, San Francisco.
- Coelho, L. S. dos, Santos, A. A. P., & Costa, N.C.A. (2008). Podemos prever a taxa de câmbio brasileira? Evidência empírica utilizando inteligência computacional e modelos econométricos. *Gestão & Produção*, 15(3), 635-647.
- Cumby, R., Figlewski, S., & Hasbrouck, J. (1993). Forecasting volatility and correlations with EGARCH Models. *Journal of Derivatives*, 1(2), 51-63.
- Dickey, D.A., & Fuller, W.A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49, 1057-1073.
- Diebold, F.X., & Mariano, R.S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, 253-263.

- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations. *Econometrica*, *50*, 987-1007.
- Engle, R.F., & Patton, J.A. (2001). What good is a volatility model? *Quantitative Finance*, *1*, 237-245, 2001.
- Fernandez, C., & Stell, M. (1998). On Bayesian modelling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association*, *93*, 359-371.
- Garman, M.B., & Klass, M.J. (1980). On the estimation of security price volatility from historical data. *Journal of Business*, *53*, :67-78.
- INFOMONEY. (2018). *Histórico de cotações*. Recuperado em 03 julho, 2018, de <https://www.infomoney.com.br/mercados/ferramentas/historico-de-cotacoes>.
- Jarque, C.M., & Bera, A. K. (1987). A Test for Normality of Observations and Regression Residuals. *International Statistical Review*, *55*(2), 163-172.
- Jiang, W., Ruan, Q., Li, J., & Li, Y. (2018). Modelling returns volatility: realized GARCH incorporating realized risk measure. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, *500*, 249-258.
- Jorion, P. (1995). Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market. *Journal of Finance*, *50*, 507-528.
- Lai, Y.-S. (2018). Evaluating the hedging performance of multivariate GARCH models. *Asian Pacific Management Review*, *24*(1), 1-1086-95.
- Lama, A., Jha, G. K., Paulo, R. K., & Gurung, B. (2015). Modelling and Forecasting of Price Volatility: An Application of GARCH and EGARCH models. *Agricultural Economics Research Review*, *28*(1), 73-82.
- Lim, C. M., & Sek, S. K. (2013). Comparing the performances of GARCH-type models in capturing the stock market volatility in Malaysia. *International Conference of Applied Economics (ICOAE)*. *Procedia Economics and Finance*, *5*, 478-487.
- Ljung, G. M., & Box, G.E.P. (1978). On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, *65*(2), 297-303.,
- Luo, L., Pairete, S., & Chatpatanasiri, R. (2017). Garch-type forecasting models for volatility of stock market and MCS test. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, *46*(7), 5303-5312.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, *5*, 77-91.
- Mhmoud, A. S., & Dawalbait, F. M. (2015). Estimating and forecasting stock market volatility using GARCH Models: Empirical Evidence from Saudi Arabia. *International Journal of Engineering Research & Technology*, *4*(2):464-471.
- Mincer, J., & Zarnowitz, V. (1969). The Evaluation of Economic Forecasts. In Mincer, J. (Ed.). *Economic Forecasts and Expectations* (pp. 3-46). Nova Iorque: National Bureau of Economic Research.
- Morettin, P.A. (2011). *Econometria Financeira – Um curso em séries temporais financeiras*. (2. a Eded.). São Paulo: Blucher.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroscedasticity in asset returns. *Econometrica*, *59*, 347-370.
- Ng, S., & Perron, P. (2001). Lag Length selection and the construction of unit root tests with good size and power. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, *6*, 1519-1554.
- Oliveira, A. M. B. de, & Araújo, A. M. (2018). Investigação sobre persistência na variância e quebras estruturais nas series de preços da manga e uva exportadas da Bahia, Brasil. *Exacta-EP*, *16*(1), 33-42.
- Oliveira, M.H.F, & Rebelatto, D.A.N. (2011). Os fundos de investimentos em ações no mercado financeiro brasileiro: os gestores e administradores são capazes de superar o índice BOVESPA? *Revista Produção Online*, *11*(1), 76-95.
- R Core Team. (2018). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria: R Core Team. Recuperado em 10 abril de 2018, de <http://www.R-project.org/>.
- Reis, D.L.P.E. dos, Mattos, R.S., Perobelli, F.F.C., & Corrêa, W.R. (2013). Options Pricing for Petrobras Share: A Comparison between Realized Volatility and Conditional Heteroskedastic Estimations. In: *First International Workshop in Financial Econometrics*, Natal, Rio Grande do Norte, Brazil, 1.
- Santos, D. G. dos., & Ziegelmann, F. A. (2012) Estimação e previsão de volatilidade em períodos de crise: um estudo comparando modelos GARCH e modelos aditivos semiparamétricos. *Revista Brasileira de Finanças*, *10*(1):49-70.
- Schmidt, C.A.J, & Lima, M. A. M. (2004). A demanda por energia elétrica no Brasil. *Revista Brasileira de Economia*, *58*, 67-98.

- Schwarz, G. (1978) Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, *6*(2):461-464.
- Simões, M. D., Klotzle, M. C., Pinto, A. C. F., & Levrini, G. (2012). Uma avaliação da volatilidade dos preços da soja no Mercado internacional com dados de alta frequência. *Gestão & Produção*, *19*(1): 219-231.
- Tsay, R. S. (2002). *Analysis of Financial Time Series: Financial Econometrics*. Wiley, Nova Iorque.
- Yip, H., Fan, H., & Chaing, Y (2013). Predicting the maintenance cost of construction equipment: Comparison between general regression neural network and Box-Jenkins time series models. *Automation in Construction*, *38*:30-38.

Recebido em: 13 nov. 2018 / Aprovado em: 25 jun. 2019

Para referenciar este texto

American Psychological Association (APA)

Thomaz, P. S., Mattos, V. L. D. de., Nakamura, L. R., Konrath, A. C., & Nunes, G. dos S. (2020). Modelos GARCH em ações financeiras: um estudo de caso. *Exacta*, *18*(3), 626-648. <https://doi.org/10.5585/ExactaEP.v18n3.10921>.