

# Um estudo de métodos de suavização para o multigrid algébrico baseado em Wavelets

*A study of Smoothing Methods for the Wavelet-based Algebraic Multigrid*

Fabio Henrique Pereira

fabiohp@uninove.br

Programa de Mestrado em Engenharia de Produção da  
Universidade Nove de Julho – Uninove  
Centro de Pós-Graduação Memorial, Av. Francisco Matarazzo,  
612, Barra Funda, São Paulo, Brasil.

Silvio Ikuyo Nabeta

nabeta@pea.usp.br

Departamento de Engenharia de Energia e Automação  
Elétricas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
– PEA/EPUSP  
Avenida Professor Luciano Gualberto, travessa 3, n. 380,  
Cidade Universitária, São Paulo, Brasil.

O método Multigrid Algébrico baseado em Wavelets foi proposto para resolver sistemas de equações lineares gerados em aplicações do Método Elementos Finitos. Como em qualquer abordagem multinível, é importante garantir uma eficiente interação entre o método de suavização e a correção do erro nos níveis de baixa resolução. Ao contrário da abordagem tradicional do multigrid algébrico, que garante a boa interação dos seus componentes através de uma seleção apropriada dos subsistemas e dos operadores de transferência, o WAMG possui uma maior dependência do método de suavização que merece ser investigada. Este trabalho realiza uma investigação a respeito dos requerimentos sobre os métodos de suavização no Multigrid algébrico baseado em Wavelets. Algumas variações dos métodos de suavização Gauss-Seidel e Sobre Relaxação Sucessiva são testadas e as amplitudes dos componentes de frequência do erro, antes e depois da aplicação do método de suavização, são analisadas para um problema elíptico.

**Palavras-chaves:** Multigrid Algébrico. Métodos de Suavização. Transformada Wavelet Discreta.

The Wavelet-based Algebraic Multigrid method was proposed for the solution of linear systems issued from Finite Element applications. Like in any multilevel approach, it is very important to ensure an efficient interaction between the smoother and the coarse-grid correction in the WAMG. In contrast to the standard algebraic multigrid approach, that uses some simple relaxation scheme and enforces the interaction by choosing the coarser levels and the transfer operators appropriately, the WAMG relies more strongly on the smoothing method. In order to better understand this smoother dependency, an investigation about the requirements over smoother methods in wavelet-based algebraic multigrid is accomplished in this work. Some variants of the Gauss-Seidel and Successive Over Relaxation smoothers were tested and the magnitudes of the frequency components of the error before and after the smoother application were analyzed for an elliptic problem.

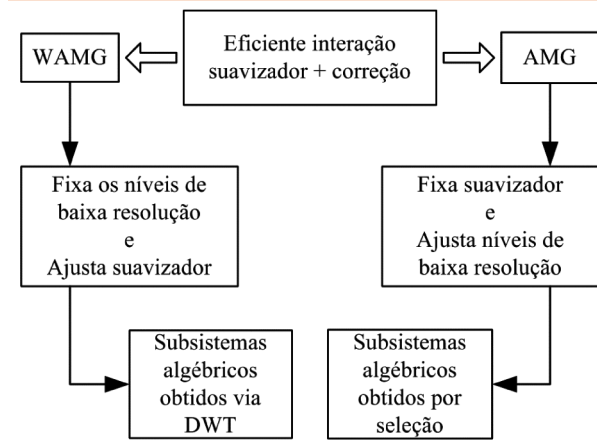
**Key words:** Algebraic Multigrid. Smoothing Methods. Discrete Wavelet Transform.



## 1 Introdução

O método Multigrid Algébrico baseado em Wavelets (WAMG) foi proposto para resolver sistemas de equações lineares gerados em aplicações de Elementos Finitos em problemas de Campos Eletromagnéticos (PEREIRA, 2007). Neste método, uma transformada wavelet discreta incompleta é aplicada ao sistema original para gerar uma aproximação de baixa resolução da matriz de coeficientes em cada nível de um processo de multiresolução. A mesma transformada incompleta é utilizada para transferir os vetores entre os diferentes *grids* no esquema multigrid.

No método WAMG, assim como em qualquer abordagem multinível, é importante garantir uma eficiente interação entre o método de suavização e a correção do erro nos níveis de baixa resolução (*coarse grid*). Ao contrário da abordagem tradicional do multigrid algébrico, que garante a boa interação dos seus componentes através de uma seleção apropriada dos subsistemas e dos operadores de transferência (TROTTEMBERG, OOSTERLEE, SCHULLER, 2001), o WAMG depende mais do método de suavização. Sob esse ponto de vista, o método WAMG se assemelha mais ao multigrid geométrico uma vez que, nessa abordagem é necessário selecionar um método de suavização apropriado para garantir que o erro seja suave o suficiente para ser representado de forma adequada nos níveis de baixa resolução definidos pela Transformada Wavelet Discreta (do inglês DWT). Essa característica constitui uma importante diferença conceitual entre o WAMG e a abordagem algébrica tradicional (AMG), que cria os níveis de baixa resolução levando em consideração a característica do erro produzido pelo método de suavização em uso. Essa diferença conceitual é ilustrada esquematicamente na Figura 1, a qual foi adaptada de (TROTTEMBERG, OOSTERLEE, SCHULLER, 2001).



**Figura 1: WAMG versus AMG**

Fonte: Os autores (adaptado de (TROTTEMBERG, OOSTERLEE, SCHULLER, 2001).

## 2 Os Métodos de suavização

O princípio de funcionamento do método multigrid está intimamente relacionado ao comportamento de convergência dos métodos iterativos estacionários como, por exemplo, os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel. Uma análise detalhada desses métodos permite afirmar que eles são muito eficientes na eliminação dos componentes de alta frequência do erro, mas, por outro lado, são ineficazes no que diz respeito à remoção dos componentes suaves. Por essa razão, esses métodos são também chamados de suavizadores.

A convergência dos métodos iterativos estacionários é governada pelos autovalores da sua matriz de iteração. Para o método de Jacobi com relaxação, por exemplo, a matriz de iteração  $P_\omega$  tem a forma (BRIGGS, HENSON, MCCORMICK, 2000),

$$P_\omega = (1 - \omega)I + \omega D^{-1}(L + U) \quad (1)$$

na qual  $D$  é a diagonal principal e  $L$  ( $U$ ) é parte estritamente triangular inferior (superior) de uma matriz  $A$ , obtida pela discretização de uma equa-

ção de Poisson unidimensional. Os autovalores da matriz  $P_\omega$ , nesse caso, são dados pela seguinte expressão:

$$\lambda_k(P_\omega) = 1 - 2\omega \text{sen}^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \quad (2)$$

Assim, para  $k=1$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_1(P_\omega) &= 1 - 2\omega \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 1 - 2\omega \text{sen}^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \\ &\approx 1 - 2\omega \frac{\pi^2 h^2}{4} = 1 - \frac{\omega \pi^2 h^2}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

na qual  $h$  representa o espaçamento entre os pontos da discretização. A expressão (3) implica que,

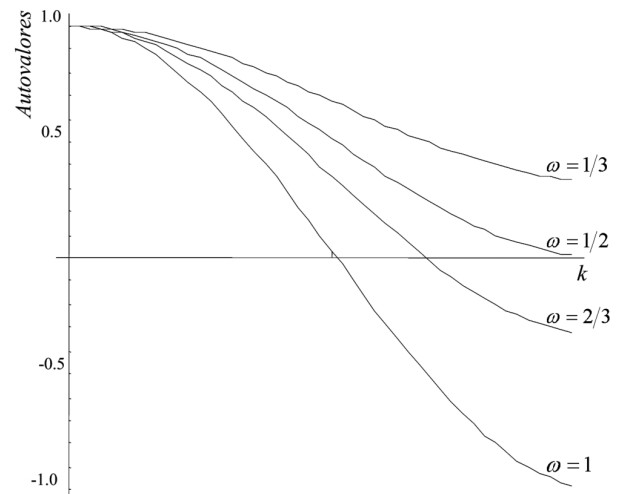
$$\lambda_1(P_\omega) \approx 1 \quad \forall \omega \in (0,1) \quad (4)$$

Como  $\lambda_1$  é associado a um autovetor da forma,

$$w_j = \text{sen}\left(\frac{j\pi}{n}\right) \quad (5)$$

Resulta de (2)-(5) que os componentes do erro associados às baixas frequências não são removidos eficientemente pelo método de Jacobi, e essa propriedade é compartilhada por todos os métodos estacionários (BRIGGS, HENSON, MCCORMICK, 2000). Uma representação gráfica dos autovalores da matriz  $P_\omega$  para diferentes valores do parâmetro de relaxação  $\omega$  é apresentada na Figura 2, na qual é fácil verificar visualmente o resultado descrito na equação (4).

Como os componentes suaves do erro aparecem mais oscilatórios em um domínio com discretização menos refinada (maior valor de  $h$  na equação (3) ou, equivalentemente, menor valor de  $n$  na equação (4)), essa característica de suavização dos métodos iterativos estacionários sugere a transferência do problema para um outro nível de resolução, no qual a discretização do domínio do problema possui um menor número de pontos.



**Figura 2: autovalores da matriz de iteração do método de Jacobi com relaxação para diferentes valores de  $\omega$ . Matriz obtida pela discretização da equação de Poisson unidimensional**

Fonte: (BRIGGS, HENSON, MCCORMICK, 2000).

A repetição recursiva desse processo dá origem ao método multigrid.

### 3 Os Requerimentos sobre Suavizadores no WAMG

Para analisar os requerimentos sobre os métodos de suavização no método WAMG é importante entender o comportamento da transformada wavelet discreta e os efeitos do uso dessa técnica no contexto do método multigrid algébrico.

Usualmente na literatura, a transformada wavelet discreta é definida usando o conceito de banco de filtros (JENSEN, LA COUR-HARBO, 2001; SARKAR, SALAZAR-PALMA, MICHAEL, 2002). Nesse caso, filtros passa-baixa e passa-alta são escolhidos para obter, respectivamente, os componentes de baixa frequência e alta frequência do sinal de entrada. Durante esse processo, se o sinal discreto  $x=\{x[n]\}$ ,  $n$  um número natural, for suficientemente suave, com os componentes de alta fre-



quência próximos de zero, então o sinal de saída que é formado apenas pelos componentes de baixa frequência será uma boa aproximação do sinal de entrada.

Para entender melhor os efeitos dessa abordagem no contexto do método WAMG é conveniente supor a existência de apenas dois níveis: o nível original e outro nível com menor resolução. Como é usual, o processo multigrid é obtido do esquema com dois níveis através de recursão. O método WAMG utiliza filtros passa-baixa para obter uma aproximação da matriz de coeficientes do sistema original, a qual é utilizada no nível de baixa resolução. Assim, após aplicar um método de suavização ao sistema linear e encontrar uma solução aproximada para esse sistema no nível original, o método utiliza a aproximação da matriz para resolver a equação residual no nível de baixa resolução. A solução obtida para equação residual é, então, usada para corrigir o erro gerado pela solução aproximada encontrada no nível superior.

Quanto melhor for a correção do erro promovida pela solução da equação residual, melhor será o desempenho do método WAMG. Entretanto, como o nível de baixa resolução é gerado apenas pelas baixas frequências (a metade inferior das frequências presentes no nível original), a correção do erro somente poderá ser suficientemente precisa se o vetor erro a ser corrigido não possuir componentes de alta frequência com amplitudes elevadas. Do ponto de vista algébrico, significa dizer que se o vetor erro possui componentes de alta frequência então não é possível escrevê-lo precisamente como uma combinação linear dos vetores da base do espaço de baixa resolução, uma vez que esses vetores possuem apenas as baixas frequências filtradas pela transformada wavelet discreta.

Portanto, o método de suavização deve ser capaz de eliminar, ou ao menos atenuar, as ampli-

tudes dos componentes de alta frequência do vetor erro para que a correção desse erro seja adequada e, em última análise, o método seja eficiente.

## 4 Descrição do Problema Teste

Este artigo analisa a eficiência de alguns dos mais comuns suavizadores no contexto do WAMG. A fim de realizar esta tarefa, o método WAMG, em conjunto com diferentes métodos de suavização, é aplicado na resolução de sistemas de equações lineares gerados pela aplicação do método dos elementos finitos em uma equação diferencial parcial elíptica (6), definida em uma malha uniforme, com  $n \cdot n$  pontos, no domínio quadrado  $\Omega = [-1,1] \cdot [-1,1]$  e com condições de contorno de Dirichlet:

$$-\left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\right) = f(x, y) \quad (6)$$

Para analisar o comportamento de convergência, assume-se que a solução exata  $\bar{x}$  é conhecida, como em (7), e utiliza-se esse vetor para obter o vetor de termos independentes  $b$ . O vetor erro  $e$  é definido, como é usual, da forma

$$e = \bar{x} - x$$

na qual  $x$  é uma aproximação para a solução exata  $\bar{x}$ .

$$\bar{x}_i = \sin(2i \cdot 200\pi/n) + \sin(2i \cdot 600\pi/n) + \sin(2i \cdot 1200\pi/n) \quad (7)$$

Para os resultados apresentados a seguir foi usada uma discretização uniforme com 5041 pontos o que produziu um sistema linear com 5041 incógnitas.

## 5 Resultados Numéricos

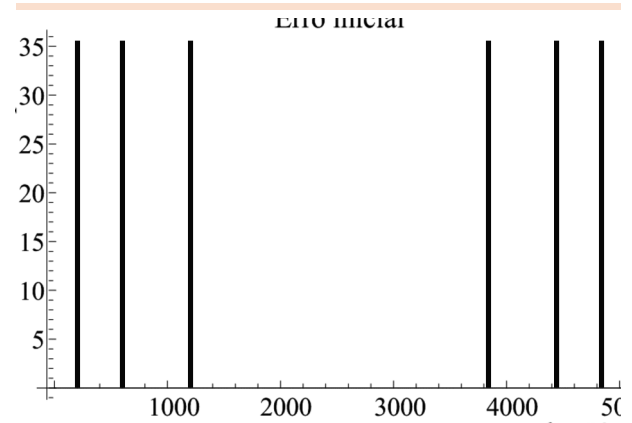
Foram testadas três variações - *forward*, *backward* e *symmetric* – dos métodos Gauss-Seidel (GS) e Sobre Relaxação Sucessiva (SOR) na suavização do erro para o WAMG. Na versão denominada *forward* (*backward*) o processo de suavização é realizado na ordem crescente (decrecente) das linhas da matriz. A versão chamada aqui de *symmetric* é caracterizada pela aplicação da técnica de suavização de forma alternada nas linhas ímpares e pares da matriz.

Para o método SOR foi utilizado o parâmetro de relaxação  $\omega = 1.6$ , que corresponde ao valor ótimo para o problema teste (AXELSSON, 1995).

O efeito da aplicação de cada um desses métodos na suavização do erro foi analisado comparando os componentes de frequência dos erros obtidos após dois passos de suavização, para cada um dos métodos, com o erro inicial, gerado pela utilização do vetor nulo como estimativa inicial.

As amplitudes dos componentes de frequência do erro inicial e dos erros gerados são apresentadas respectivamente nas Figuras 3 e 4. Como foi usada uma estimativa inicial nula, o erro inicial apresenta as mesmas frequências da solução exata. Os resultados apresentados foram obtidos usando a transformada de Fourier e se referem ao primeiro nível do processo de multiresolução, no qual a matriz original é utilizada.

O principal objetivo da análise dos componentes de frequência é investigar a eliminação/atenuação das altas frequências do erro pelos diferentes métodos de suavização, e os efeitos dessa eliminação/atenuação no comportamento de convergência do método WAMG. Sendo assim, também foram analisadas outras características do WAMG, como o número de iterações e tempo de processamento, para cada um dos métodos de suavização utilizados. Os resultados referentes a essa análise são apresentados na Tabela I.



**Figura 3: Amplitudes dos componentes de frequência do erro inicial**

Fonte: os autores.

**Tabela 1: Wamg com diferentes suavizadores**

Método de suavização	Número de iterações	Tempo (segundos)
<i>Forward</i> GS	5	0.51
<i>Backward</i> GS	10	2.49
<i>Symmetric</i> GS	9	2.07
<i>Forward</i> SOR	10	1.20
<i>Backward</i> SOR	13	3.34
<i>Symmetric</i> SOR	>100	-

Fonte: Os autores.

Resultados de convergência dos métodos Gauss-Seidel e SOR, quando aplicados como técnicas iterativas de solução são apresentadas na Fig. 5. O comportamento de convergência observado na figura indica a existência de autovalores mais próximos de 1.0 no caso do método SOR o que, de acordo com os resultados apresentados na seção 2, dificultando a eliminação dos componentes de baixa frequência do erro e, conseqüentemente, limita o desempenho do método com uma técnica de suavização para o WAMG.

## 6 Conclusões

Este trabalho faz uma análise do espectro de frequência do erro obtido antes e depois do processo de suavização no WAMG utilizando

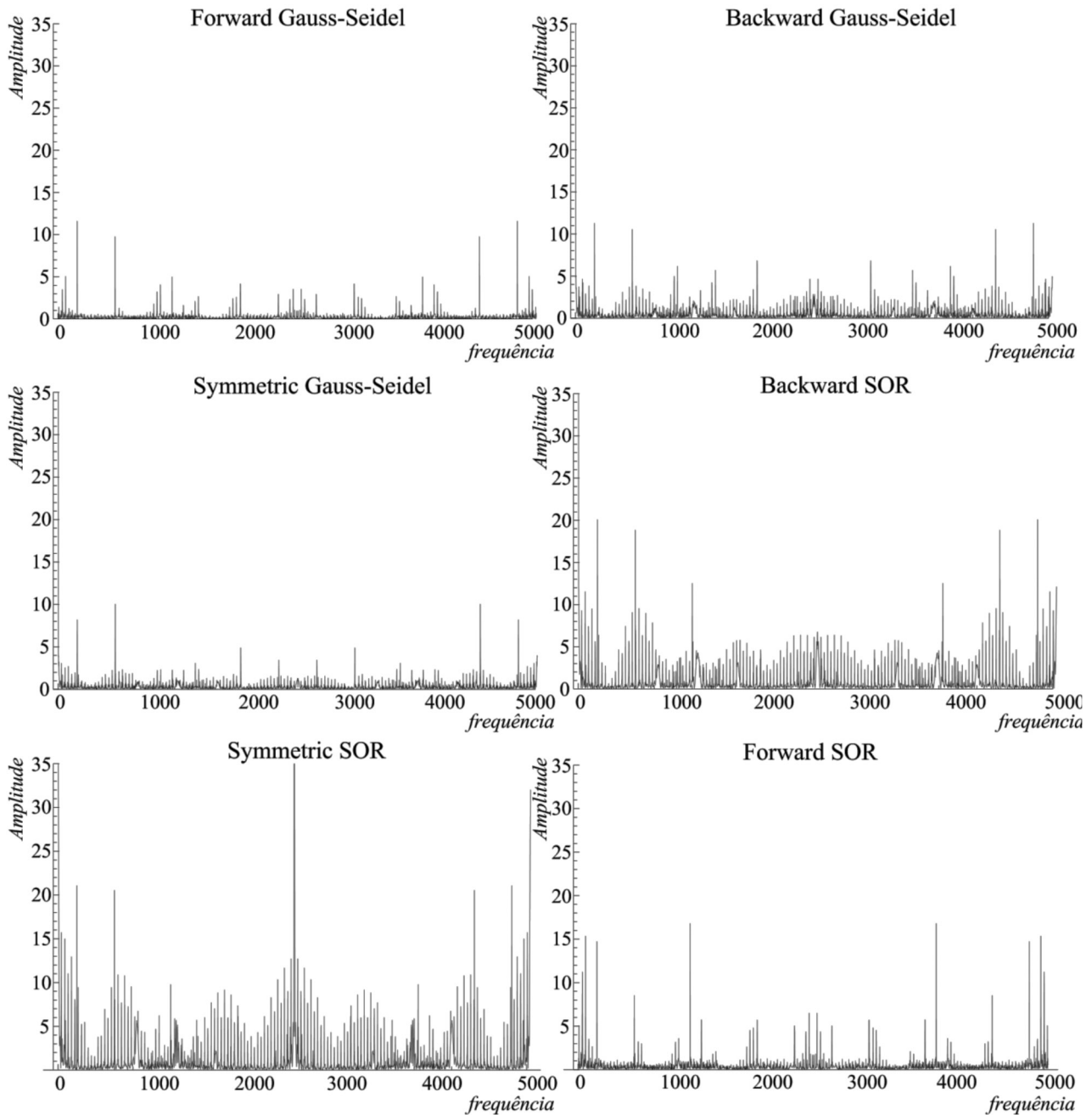


Figura 4: Amplitudes dos componentes de frequência dos erros obtidos após dois passos de suavização para os diferentes métodos testados

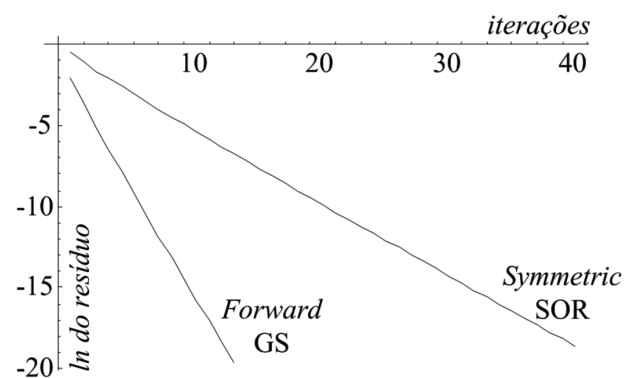
Fonte: os autores.

a transformada de Fourier. Os resultados obtidos indicam que, para o caso testado, a convergência do método WAMG é tão melhor quanto maior for a redução que a técnica de suavização provoca na amplitude dos componentes de alta frequência do erro. Sob esse ponto de vista,

é possível observar uma relação direta entre a atenuação das altas frequências e o número de iterações necessárias para convergência, o que confere um desempenho ligeiramente superior ao método *forward* Gauss-Seidel, no caso testado neste trabalho.

Um aspecto interessante nos resultados obtidos diz respeito ao desempenho não satisfatório do método *symmetric* SOR, a despeito da simetria definida positiva da matriz e da utilização do parâmetro de relaxação ótimo para esse método. Uma análise dos autovalores da matriz de iteração desse método pode revelar uma maior concentração de valores próximos ao valor 1.0, em comparação aos demais métodos testados. Em função das dificuldades numéricas para o cálculo dos autovalores, essa análise foi feita indiretamente através da observação da convergência dos métodos de suavização quando aplicados como uma técnica iterativa de solução para o mesmo problema descrito por (1) e (2). Pode ser observado na Figura 5 uma pior convergência do *symmetric* SOR o que indica realmente a existência de autovalores mais próximos de 1.0, dificultando a convergência.

É importante destacar que os vários testes numéricos realizados estão sendo úteis para ajudar no desenvolvimento de suavizadores mais eficientes, com características inerentemente paralelas, para o WAMG. Como exemplo, pode-se citar o estudo de técnicas de suavização que buscam uma aproximação da solução no subespaço das altas frequências produzido pelos filtros passa-alta na transformada wavelet discreta. Esses desenvolvimentos facilitarão o emprego da técnica em conjunto com o Método dos Elementos Finitos em problemas em 3 dimensões nos quais o processamento paralelo se faz necessário como, por exemplo, em problemas de aterramento, na simulação



**Figura 5: Resultados de convergência para os métodos *forward* Gauss-Seidel e *symmetric* SOR usados como técnicas de solução**

Fonte: os autores.

de fenômenos térmicos em processos de usinagem, entre outros.

## 7 Referências

- AXELSSON, O., *Iterative solution methods*. New York: Cambridge University Press, 1995.
- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. *A Multigrid Tutorial*. 2. ed. California: SIAM, 2000.
- JENSEN, A.; LA COUR-HARBO, A. *The Discrete Wavelet Transform*, Ripples in Mathematics, Berlin: Springer, 2001.
- PEREIRA, F. H., et. al., A Wavelet-based Algebraic Multigrid Preconditioning for Iterative Solvers in Finite Element Analysis. *IEEE Trans. on Magn.*, v. 43, n. 4, pp. 1553-1556, 2007.
- SARKAR, T. K.; SALAZAR-PALMA, M.; MICHAEL, C. W., *Wavelet Applications in Engineering Electromagnetics*. Boston: Artech House, 2002.
- TROTTEMBERG, U.; OOSTERLEE, C. W.; SCHULLER, A. *Multigrid*. New York: Academic Press, 2001, pp. 45-56.

Recebido em 27 maio 2009 / aprovado em 23 set. 2009

### Para referenciar este texto

PEREIRA, F. H.; NABETA, S. I. Um estudo de métodos de suavização para o multigrid algébrico baseado em Wavelets. *Exacta*, São Paulo, v. 7, n. 2, p. 165-171, 2009.

