

# Algoritmos de otimização aplicados à solução de sistemas estruturais não-lineares com restrições: uma abordagem utilizando os métodos da Penalidade e do Lagrangiano Aumentado

*Optimization algorithms applied to nonlinear structural systems solution with constrains: a boarding using a Penalty Method and an Augmented Lagrangian Method*

Alex Alves Bandeira

Departamento de Construções e Estruturas;  
Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia – EP/  
UFBA.  
Salvador – Bahia [Brasil]  
alexbandeira@ufba.br

Caroline D. Guimarães

Bolsista do PIBIC-FAPESB;  
Curso de Engenharia Civil – EP/UFBA.  
Salvador – Bahia [Brasil]  
carol.duarte@gmail.com.

Leandro de A. Freitas

Bolsista do PIBIC-CNPQ;  
Curso de Engenharia Civil – EP/UFBA.  
Salvador – Bahia [Brasil]  
lfreitas85@gmail.com.

Leila M. Santos

Bolsista – PIBIC/UFBA;  
Curso de Engenharia Civil – EP/UFBA.  
Salvador – Bahia [Brasil]  
leila.miranda@hotmail.com

## Resumo

Neste trabalho, objetivou-se apresentar métodos implícitos de otimização aplicados à engenharia de estruturas. São apresentados de forma sucinta os Métodos de Newton, do Lagrangiano, da Penalidade e do Lagrangiano Aumentado. É apresentada uma base teórica sobre os conceitos e os algoritmos de programação matemática para cada um desses métodos e, posteriormente, são apresentados exemplos de aplicação de contato mecânico, utilizando os métodos estudados. Esses métodos são amplamente utilizados nos programas de elementos finitos para a análise de estruturas. Neste artigo, não se objetivou apresentar o Método dos Elementos Finitos, mas sim, mostrar alguns exemplos de modelagem estrutural usando esse método. É imprescindível ressaltar a importância do conhecimento dessas ferramentas no processo de análise de estruturas, quando se utiliza a modelagem em elementos finitos.

**Palavras-chave:** Método da Penalidade. Método do Langrangiano Aumentado. Otimização.

## Abstract

The basic aim of this work is to present implicit methods of optimization applied in structures engineering. The Newton Method, Lagrange Method, Penalty Method and Augmented Lagrangiano Method are briefly explained. A theoretical base on the concepts and the mathematical programming algorithms is presented for each one of these methods and furthermore, application examples of contact mechanics are shown using the studied methods. These methods are widely used in the finite elements programs during the structures analysis. This article does not have objective to introduce the Finite Elements Method theories, but only show some numerical examples of structures modeled with this method. It is essential to stand out the importance of the knowledge of these tools in the process of structures analysis when the finite elements model is used.

**Key words:** Augmented Langrangiano Method. Optimization. Penalty Method.

## 1 Introdução

É de grande importância na engenharia civil a utilização de métodos para a resolução de problemas de programação não-linear na otimização de estruturas. O objetivo neste artigo é caracterizar alguns desses métodos matemáticos.

Os métodos matemáticos aplicados à análise de estruturas têm origem nos séculos XVIII e XIX. Sua configuração atual resulta do desenvolvimento da mecânica, da matemática, da análise numérica e da computação.

Baseando-se em trabalhos de cientistas como Bernoulli, Lagrange e Stevin, que assentaram as bases para o princípio dos trabalhos virtuais ainda no século XVIII, foram elaboradas as bases que sustentam a formulação dos métodos energéticos na engenharia estrutural. Tornava-se possível a análise de estruturas hiperestáticas, desde que se enfrentasse a aritmética trabalhosa requerida para os sistemas algébricos obtidos. A essas técnicas denominou-se análise matricial de estruturas, sendo os métodos das forças e dos deslocamentos suas principais variantes.

Aprofundaram-se tais conceitos iniciais no curso de elementos finitos, em que foram transmitidos conhecimentos matemáticos básicos para o entendimento futuro dos elementos finitos. O princípio da otimização foi abordado a fim de estudar as diferentes modelagens existentes na área das engenharias, como por exemplo, Civil, Mecânica, Aeronáutica, Naval.

Os exemplos aqui propostos visam apresentar uma introdução de como resolver problemas elementares de contato, utilizando os métodos de otimização. A ideia é estudar problemas simples, gerando um modelo físico para cada problema e desse gerar equações matemáticas com ou sem restrições.

Como exemplo clássico dessa aplicação, é estudado um modelo de molas associadas em sé-

rie, com equações não-lineares, solicitadas por forças externas ao sistema e restritas em seus deslocamentos por um obstáculo, simulando um problema de contato simples entre molas deformáveis. Analisa-se também um sistema estrutural formado por molas e barras indeformáveis (barras rígidas). O fato das barras serem indeformáveis torna os problemas muito mais simples, pois basicamente são estudados apenas os deslocamentos de sistemas mecânicos convencionais. Dessa forma, não se faz necessário entrar em formulações de elementos finitos para aplicar nos exemplos aqui propostos. O objetivo é estudar o método e a sua aplicação.

Por meio da modelagem matemática, utilizando o princípio do Método da Energia e da otimização, usando o Método do Lagrangiano Aumentado, pode-se verificar a interpretação geométrica e física da atualização dos multiplicadores de Lagrange, veja Bandeira (2001), Bertsekas (1995), Fletcher (1980), Herskovits (1995) e Luenberger (1984). Em seguida, será estudado um sistema estrutural simples usando-se os algoritmos descritos.

## 2 Definição teórica dos métodos matemáticos

Os problemas de programação, propostos neste artigo, são caracterizados pela minimização da função  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , que, por sua vez, é uma função contínua e sua derivada parcial até a segunda ordem permanece contínua.

A função  $f(x)$  poderá ou não está sujeita a restrição ( $g(x)$ ). Se  $f(x)$  for uma função com restrição, essa será de igualdade ( $g(x) = 0$ ) ou desigualdade ( $g(x) \leq 0$ ).

O método utilizado para resolver os problemas de otimização estrutural sem restrições é o de Newton e suas variações (Métodos Quase-

Newton). Trata-se, por exemplo, da introdução da busca unidimensional, como o Método do BFGS (*Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Method*). Para os problemas estruturais com restrições pode-se citar o Método do Lagrangiano, o da Penalidade e o do Lagrangiano Aumentado.

Para a resolução dos métodos citados é preciso conhecer as condições de otimalidade de primeira e segunda ordem.

A condição necessária de otimalidade de primeira ordem afirma que o gradiente de primeira ordem da função objetivo é nulo, ou seja,  $\nabla f(x^*) = 0$ . Claramente, essa condição permite que seja calculado o ponto de mínimo ou de máximo da função objetivo.

A condição necessária de otimalidade de segunda ordem deve ser satisfeita. Para isso, a Hessiana ( $\nabla^2 f(x^*)$ ), que é a variação de segunda ordem da função objetivo, deve ser semi-definida positiva, ou seja,  $d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0, \forall d \in \mathbb{R}^n$ .

E, por fim, a condição suficiente de Otimalidade de Segunda Ordem deve garantir que a Hessiana seja definida positiva, ou seja,  $d^T \nabla^2 f(x^*) d > 0, \forall d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0$ .

## 2.1 Programação matemática ou otimização

Na programação matemática, tem-se como objetivo a análise e resolução de problemas do tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & g_i(x) = 0, \quad i \in I, \\ & g_j(x) \leq 0, \quad j \in D, \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad (1)$$

em que a função  $f(x)$  é denominada “função objetivo”, e as funções  $g_i(x)$ , para  $i = 1, \dots, m$ , e  $g_j(x)$ , para  $j = 1, \dots, q$  são chamadas “restrições”. O conjunto finito dos índices das restrições de igualdade é chamado de  $I = \{1, \dots, m\}$ , e o conjunto finito

dos índices das restrições de desigualdade, por  $D = \{1, \dots, q\}$ . O conjunto finito dos índices de todas as restrições é nomeado  $R = I \cup D$ .

Quando um ponto  $x$  satisfaz a todas as restrições, diz-se que ele é “viável”. O conjunto de todos os pontos viáveis é chamado de região viável  $\Gamma$ . Quando um ponto  $x$  não satisfaz a alguma restrição, diz-se que ele é “inviável”. Um ponto viável que minimiza  $f(x)$  será indicado por  $x^*$  e será denominado de “ponto ótimo”.

Quando o método é aplicado à análise de estruturas, a função objetivo passa a ser vista como a energia potencial total da estrutura (Método da Energia). Nesse caso, o multiplicador de Lagrange tem como interpretação física uma força aplicada na estrutura para impedir o deslocamento, quando for ativado, ou seja, quando a restrição do problema for violada.

É importante mencionar que nas seções a seguir serão apresentados de forma sintetizada os métodos de Newton, de Lagrange, da Penalidade e do Lagrangiano Aumentado. Para mais detalhes veja, Bandeira (2001), Bertsekas (1995), Fletcher (1980), Herskovits (1995) e Luenberger (1984).

## 2.2 Método de Newton

O método de Newton é utilizado para resolver sistemas de equações não lineares sem restrições. Escrevendo o sistema de equações não-lineares na forma vetorial, o problema de otimização pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{Solucionar} & f(x) = 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad (2)$$

em que a função vetorial  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua com derivadas parciais contínuas até primeira ordem. O algoritmo do método de Newton está descrito na Tabela 1.

**Tabela 1: Algoritmo do método de Newton**

Passo 1:	Faça $k = 0$ e adote um valor inicial para $x$ .
Passo 2:	Calcule $f(x^{(k)})$ e o Jacobiano $\nabla f(x^{(k)})$ para o ponto corrente $x^{(k)}$ .
Passo 3:	Se $\ f(x^{(k)})\  < \text{TOL}$ pare. Faça $x^{(k)}$ a solução do problema. Caso contrário, vá ao passo 4. Considere TOL a tolerância definida, por exemplo, como $\text{TOL} = \epsilon \cdot \ f(x^{(k)})\ $ .
Passo 4:	Resolva o sistema linear: $[\nabla f(x^{(k)})]^T d^{(k)} = f(x^{(k)})$ .
Passo 5:	Faça $k = k + 1$ , atualize a variável $x^{(k+1)} = x^{(k)} - d^{(k)}$ e retorne ao passo 2.

Fonte: Bandeira (2001), Bertsekas (1995), Fletcher (1980), Herskovits (1995) e Luenberger (1984).

### 2.3 Método do Lagrangiano

O Método do Lagrangiano consiste em minimizar as funções com restrições. O problema geral de otimização com restrições está formulado na seção 2.1. Para resolver o problema original, é criada a função Lagrangiana a qual correlaciona a função objetivo com as restrições do problema. Essa metodologia é garantida pelo Teorema de Kuhn-Tucker (LUENBERGER, 1984). A função Lagrangiana é definida por

$$L(x, \lambda_i) = f(x) + \sum [\lambda_i + g_i(x)] + \sum [<\lambda_i + g_i(x)>]$$

$$x \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

sendo  $\lambda$  o multiplicador de Lagrange,  $g(x)$  as restrições e  $f(x)$  a função objetivo do problema. A operação matemática  $<A>$ , significa o máximo valor entre zero e  $A$ .

Para resolver a função Lagrangiana, pode-se citar o Método dos Conjuntos Ativos e o Método da Interação Conjunta. Neste artigo, não se objetivou explicar detalhadamente esses métodos. Para mais informações, veja Bandeira (2001), Bertsekas (1995), Fletcher (1980), Herskovits (1995) e Luenberger (1984).

### 2.4 Método da Penalidade

O Método da Penalidade consiste em resolver o problema original formulado na seção 2.1. A função Penalidade correlaciona a função objetivo com as

restrições do problema acrescentando um termo de segunda ordem ao problema, ou seja, o parâmetro de penalidade ( $\xi$ ). Essa metodologia também é garantida pelo Teorema de Kuhn-Tucker (LUENBERGER, 1984). A função Penalidade é definida por

$$P(x, \xi) = f(x) + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \sum_{i=1}^m \|g_i(x)\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \sum_{j=1}^q <g_j(x)>^2$$

$$x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

sendo  $g(x)$  as restrições,  $f(x)$  a função objetivo do problema e  $\xi$  o parâmetro de penalidade. O algoritmo do Método da Penalidade está descrito na Tabela 2.

**Tabela 2: Algoritmo do Método da Penalidade**

Passo 1:	Escolha uma seqüência $\{\xi^{(k)}\} \rightarrow \infty$ , por exemplo: $\{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots\}$ .
Passo 2:	Minimizar a função penalidade $P(x, \xi^{(k)})$ . Seja $x^{(k)}$ a solução.
Passo 3:	Seja TOL um parâmetro de convergência. Se $x^{(k)}$ satisfizer $\ g(x)\  \leq \text{TOL}$ , pare. Caso contrário, faça $\xi^{(k+1)}$ igual ao próximo valor da seqüência e vá ao passo 2.

Fonte: Bandeira (2001), Bertsekas (1995), Fletcher (1980), Herskovits (1995) e Luenberger (1984).

### 2.5 Método do Lagrangiano Aumentado

O método mais utilizado para resolver problemas de contato mecânico com grandes pressões nas interfaces de contato é o Método do Lagrangiano Aumentado. Isso se deve ao fato de os multiplicadores de Lagrange serem atualizados a cada incremento, evitando assim instabilidade numérica. Ele consiste na junção do Método do Lagrangiano com o da Penalidade e sua função é definida como

$$L(x, \xi, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \|g_i(x)\|^2 +$$

$$\frac{1}{2 \xi} \sum_{j=1}^q \{<\lambda_j + \xi \cdot g_j(x)>^2 - [\lambda_j]^2\}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

em que  $\xi$  é um parâmetro de penalidade e  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange. Os valores de  $\xi$  e  $\lambda^{(k)}$  são escolhidos e fixados no começo de cada minimização sem restrições e, posteriormente, o funcional  $L(x, \xi, \lambda^{(k)})$  é minimizado em relação a  $x$ . No final de cada minimização, os valores de  $\lambda$  são atualizados e o processo continua até atingir a convergência. Nesse método, as restrições são satisfeitas de forma exata, não permitindo qualquer violação das restrições.

Para ocorrer a convergência no Método do Lagrangiano Aumentado, basta o valor da penalidade  $\xi$  ser finito, enquanto no da Penalidade, o valor de  $\xi$  tende ao “infinito”.

Assim como para todos os métodos acima descritos, quando aplicada a análise de estruturas, com a utilização do Método da Energia ou dos Princípios dos Trabalhos Virtuais, a função objetivo é admitida como a energia potencial total da estrutura. A primeira variação das funções duais ao problema (função Lagrangiana, da Penalidade ou do Lagrangiano Aumentado) é vista como a equação de equilíbrio da estrutura e o seu mínimo global é a solução do problema estrutural. Em geral, a variável  $x$  são os deslocamentos nodais da estrutura.

O algoritmo do Método do Lagrangiano Aumentado está descrito na Tabela 3.

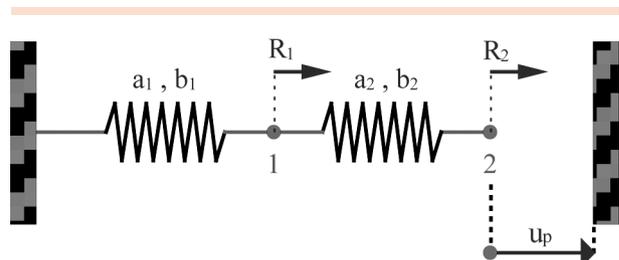
**Tabela 3: Algoritmo do Método do Lagrangiano Aumentado**

Passo 1:	Estime os valores para $\lambda^{(0)}$ e $\xi$ e faça $k = 0$ .
Passo 2:	Minimize a função do Lagrangiano Aumentado $L(x, \xi, \lambda)$ . Seja $x^{(k)}$ a solução.
Passo 3:	Seja TOL um parâmetro de convergência. Se $[x^{(k)}, \lambda^{(k)}]$ satisfizer $  \nabla L(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, \xi)   \leq \text{TOL}$ , pare. Caso contrário, vá ao passo 4.
Passo 4:	Atualize os multiplicadores de Lagrange: $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \xi \cdot g(x^{(k)})$ para as restrições de igualdade e $\lambda^{(k+1)} = \langle \lambda^{(k)} + \xi \cdot g(x^{(k)}) \rangle$ para as restrições de desigualdade.
Passo 5:	Faça $k = k + 1$ e retorne ao passo 2.

Fonte: Bandeira (2001), Bertsekas (1995), Fletcher (1980), Herskovits (1995) e Luenberger (1984).

### 3 Estudo de um modelo simples com molas

Para ilustrar um problema de otimização com restrições (restrição de desigualdade), é considerado um simples modelo elástico não-linear de molas, com dois graus de liberdade, conforme ilustra a Figura 1. Na figura, o sistema de molas se deforma livremente até satisfazer a condição de não penetrabilidade, isto é, os nós 1 e 2 podem se movimentar desde que o nó 2 não ultrapasse a barreira, definida por um deslocamento prescrito  $u_p$ . O sistema atinge o equilíbrio em duas situações. Na primeira situação, o deslocamento do nó 2 é igual ou inferior ao prescrito  $u_p$ , não havendo contato do nó 2 com a barreira. Na segunda, existe o contato entre o nó 2 e a barreira, ou seja,  $r_2 \geq u_p$ . Nesse caso, é introduzida ao sistema uma força de contato que representa a reação da barreira ao nó 2 impedindo a penetração da estrutura no obstáculo considerado rígido.



**Figura 1: Sistema com restrições**

Fonte: Bandeira (1997).

Seja  $r = [r_1 \ r_2]$  o vetor dos deslocamentos nodais do sistema,  $R = [R_1 \ R_2]$  o vetor das forças externas aplicadas nos nós do sistema,  $S(r) = [S_1 \ S_2]$  o vetor das forças internas e  $F(r) = [F_1 \ F_2]$  a equação de equilíbrio. Representam-se os graus de liberdade pelos nós 1 e 2 e as constantes das molas por  $a_1, b_1, a_2, b_2$ , em que  $a_i$  é a parcela linear e  $b_i$  é a parcela não-linear. Considere-se também que as duas molas sejam elásticas não-lineares e a força

interna da mola 1 ( $f_1$ ) e força interna da mola 2 ( $f_2$ ) sejam dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 \\ f_2 &= a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 \end{aligned} \quad (6)$$

O problema de otimização com restrições de igualdade para esse exemplo pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } U(r), \\ &\text{Sujeito } g(r) = r_2 - u_p = 0, r \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (7)$$

sendo  $U(r)$  a equação da Energia Potencial Total desse sistema, considerando-o como um sistema conservativo:

$$U(r_1, r_2) = [1/2 K (\Delta)^2]_{mola1} + [1/2 K (\Delta)^2]_{mola2} + W_{ext} \quad (8)$$

em que  $K$  representa as constantes da mola,  $\Delta$  representa a deformação das molas e  $W_{ext}$  o trabalho externo realizado pelas forças externas. Dessa forma,

$$\begin{aligned} U(r_1, r_2) = & \left\{ \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot r_1^2 + \frac{1}{4} \cdot b_1 \cdot r_1^4 \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 + \frac{1}{4} \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^4 \right\} - \{ R_1 \cdot r_1 + R_2 \cdot r_2 \} \end{aligned} \quad (9)$$

O mínimo da equação da energia é calculado pelo gradiente de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \nabla U(r_1, r_2) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \begin{bmatrix} \delta U / \delta r_1 \\ \delta U / \delta r_2 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 \\ a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Pode-se notar que, a equação da energia potencial total do sistema é composta por duas variáveis, resultando em um valor escalar. Já o seu gradiente resulta em um vetor. Portanto, definindo  $S$  como o vetor das forças internas,  $R$  como o vetor das forças externas e  $F$  como a força resultante do sistema, obtém-se

$$[F] = [S] - [R] \quad (11)$$

Utilizando-se do princípio do equilíbrio estático dos corpos, quando a força resultante do sistema for nula, obtém-se a equação de equilíbrio. A segunda derivada da equação da energia em relação aos deslocamentos resulta na matriz de rigidez da estrutura. A matriz de rigidez da estrutura é definida como “Jacobiano” (formulação fraca – Princípio dos Trabalhos Virtuais) ou “Hessiana” (formulação forte – Método da Energia). A matriz de rigidez do sistema é simétrica e é definida por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_1 + 3 \cdot b_1 \cdot r_1^2 + a_2 + 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 & -a_2 - 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 \\ -a_2 - 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 & a_2 + 3 \cdot b_2 \cdot (r_2 - r_1)^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

É importante mencionar o valor didático de sempre mostrar a interpretação física dos problemas matemáticos, principalmente incentivar a interdisciplinaridade do curso.

Para efetuar a resolução do problema, considerando os graus de liberdade livres e os graus de liberdade sob as condições das restrições, deve-se escrever a formulação do Lagrangiano Aumentado como

$$L(r, \xi, \lambda) = U(r) + \langle \lambda \cdot (r_2 - u_p) + 1/2 \cdot \xi \cdot (r_2 - u_p)^2 \rangle \quad (13)$$

em que a parcela do Lagrangiano Aumentado é o trabalho exercido por uma força  $F_c$  aplicada no nó restringido no sistema. Assim, encontra-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\nabla L(r, \xi, \lambda) = F(r, \xi, \lambda) = S(r) + F_c(r, \xi, \lambda) - R = 0 \tag{14}$$

ou seja,

$$F(r, \xi, \lambda) = \begin{bmatrix} a_1 \cdot r_1 + b_1 \cdot r_1^3 - a_2 \cdot (r_2 - r_1) - b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 \\ a_2 \cdot (r_2 - r_1) + b_2 \cdot (r_2 - r_1)^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda + \xi \cdot (r_2 - u_p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

A atualização do multiplicador de Lagrange é definida por:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \xi \cdot (r_2^{(k)} - u_p) \tag{16}$$

O valor de  $\xi$  é constante durante a otimização, enquanto que o multiplicador de Lagrange  $\lambda^{(k)}$  é atualizado no começo de cada interação sem restrições. A seguir, o funcional  $L(r, \xi, \lambda)$  é minimizado em relação a  $r$  e, no final de cada minimização, os valores de  $\lambda^{(k)}$  são atualizados e o processo continua até que  $\lambda^{(k)}$  atinja a convergência  $\lambda^{(*)}$  e, conseqüentemente,  $r_2^{(k)} \leq u_p$ . Cabe-se salientar que se não houver contato o valor de  $\lambda$  é igual a zero.

### 3.1 Exemplo de aplicação do modelo simples com molas

Com base na formulação demonstrada na seção anterior, será adotado o exemplo ilustrado na Figura 2, que será resolvido pelo método do Lagrangiano Aumentado. Considere o parâmetro de penalidade  $\xi = 100$  e as demais variáveis apresentadas na Figura 2. No exemplo, as molas que são deslocadas por forças externas sofrem uma restrição por uma barreira, que dista  $u_p$  do nó 2.

Para o exemplo da Figura 2, desprezando a barreira rígida, o sistema pode ser resolvido simplesmente pelo Método de Newton. O sistema converge para a configuração de equilíbrio definida por  $r = [2,38\text{mm } 4,63\text{mm}]^T$ .

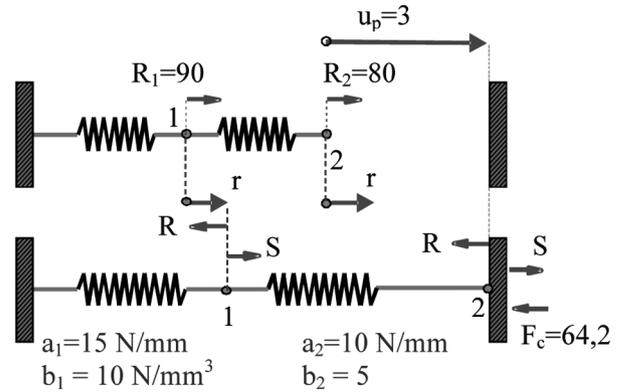


Figura 2: Exemplo de sistema de molas - configuração inicial e final

Fonte: Bandeira (1997).

Uma vez considerada a restrição representada pela barreira localizada a 3 mm do nó 2 e analisando os resultados da minimização sem restrições, pode-se naturalmente concluir que o nó 2 irá sofrer contato com a barreira, pois  $r_2 > u_p$ .

Utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado e adotando o parâmetro de penalidade constante, o sistema converge para uma configuração de equilíbrio definida pelos seguintes valores: deslocamentos de  $r = [1,97\text{mm } 3,00\text{mm}]^T$ ; multiplicador de Lagrange  $\lambda = 64,2 \text{ N}$  (veja Figura 2). Nesse caso, a reação de apoio é exatamente o valor do multiplicador de Lagrange e o deslocamento do nó 2 foi precisamente o permitido até atingir o obstáculo rígido. Com isso, para esse exemplo, a representação física do multiplicador de Lagrange é exatamente a reação de apoio que a barreira exerce sobre o sistema estrutural. Os resultados parciais dessa minimização estão representados na Tabela 4.

Na análise numérica descrita na Tabela 4, para cada iteração no multiplicador de Lagrange foram necessárias em média nove iterações no Método de Newton. Na minimização sem restrições, ou seja, em cada iteração Lagrangiana, a convergência é quadrática. Observando a Tabela 4, percebe-se que a convergência do multiplicador de Lagrange é linear. Esse fato pode ser contor-

**Tabela 4: Resultados numéricos obtidos em cada iteração do multiplicador de Lagrange**

Iteração	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda$	50,679	61,695	63,748	64,117	64,183	64,194	64,196	64,197
$r_1$	2,067	1,987	1,972	1,969	1,969	1,968	1,968	1,968
$r_2$	3,507	3,110	3,021	3,004	3,001	3,000	3,000	3,000
gap	0,5068	0,1102	0,0205	0,0037	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000
$\ \nabla u\ $	0,E+00							
$\det[\nabla^2 u]$	24.311	20.099	19.303	19.159	19.134	19.129	19.128	19.128
$\Delta\lambda$	50,679	11,016	2,053	0,369	0,066	0,012	0,002	0,000

Fonte: Os autores.

nado adotando um parâmetro de penalidade adequado para cada problema. Isso que dizer que, aumentando ou diminuindo esse parâmetro de penalidade, o número de iterações no multiplicador de Lagrange pode diminuir. Para profissionais experientes com o Método do Lagrangiano Aumentado, em geral, com oito iterações nos multiplicadores de Lagrange obtêm-se valores precisos para os problemas de contato ou para quaisquer outros problemas que envolvam restrições.

Vale à pena ressaltar que  $\lambda$  será nulo quando não houver contato, ou seja, quando o deslocamento do nó 2 for inferior ao deslocamento prescrito.

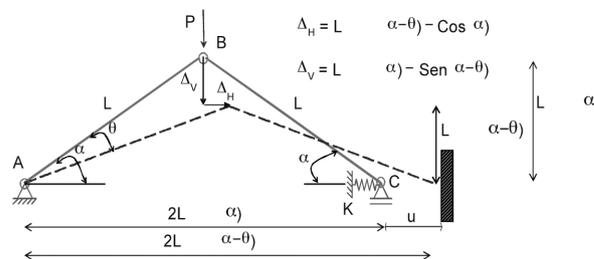
Analisando agora a situação na qual não tenha força externa aplicada ao nó 2, ou seja,  $R_2 = 0$  N, percebe-se que  $\lambda$  será positivo quando  $R_1$  assumir um valor a partir de 15,80 N. Esse dado pode ser facilmente calculado pelo Método do Lagrangiano Aumentado com restrições de igualdade.

Conclui-se então que, quando houver forças aplicadas ao sistema suficientes para haver um contato, ou um avanço fictício posterior da extremidade da mola 2 no obstáculo, haverá uma reação imposta pelo anteparo, o que chamamos de  $\lambda$ , e o parâmetro de penalidade  $\xi$  corrigirá o deslocamento dessa mola para o deslocamento permitido  $u_p$ . Para esse exemplo, o parâmetro de penalidade pode ser visto como uma mola que representa a rigidez do obstáculo. A cada iteração essa “mola fictícia  $\xi$ ” vai empurrando o nó 2 até que ele fique posicionado exatamente na superfície externa do

anteparo. Observando a Tabela 4, percebe-se que o determinante da Hessiana ( $\det[\nabla^2 U]$ ) é positivo, indicando que o sistema é estável.

## 4 Estudo de um sistema de arras rígidas

Outra possível aplicação prática pode ser verificada na análise não-linear de sistemas estruturais constituídos de barras rígidas (barras indeformáveis), como ilustra a Figura 3. Considera-se que as barras rígidas são rotuladas em suas extremidades.


**Figura 3: Sistema de barras rígidas**

Fonte: Os autores.

O exemplo propõe que, após a aplicação de uma carga vertical  $P$  no nó  $B$ , pode-se verificar que ocorrem as seguintes deformações no sistema: variação angular ( $\theta$ ) nos nós  $A$  e  $C$ ; deslocamento vertical ( $\Delta_V$ ) e horizontal ( $\Delta_H$ ) no nó  $B$ ; deslocamento

horizontal no nó C ( $2\Delta_H$ ). Observa-se que como as duas barras rígidas possuem o mesmo comprimento, a configuração deformada forma ângulos em A e B iguais, devido à simetria da estrutura.

Dessa forma, considerando L o comprimento de cada barra rígida do sistema; K a constante de rigidez elástica da mola em C;  $\alpha$  o ângulo inicial da barra AB e BC com a horizontal;  $\theta$  a variação angular nos nós A e C;  $\Delta_H$  e  $\Delta_V$  os deslocamentos horizontal e vertical do nó B; pode-se descrever a equação da energia potencial da estrutura da seguinte forma:

$$U(\theta) = \frac{1}{2} K (2\Delta_H)^2 - P \Delta_V$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2} K \left\{ 2L [\cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha)] \right\}^2 - P L [\sin(\alpha) - \sin(\alpha - \theta)]$$
(17)

A equação do equilíbrio do sistema é obtida derivando a energia potencial total em relação à variação angular  $\theta$ . Assim, tem-se:

$$\nabla U(\theta) = \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$\nabla U(\theta) = 4KL^2 [\cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha)] \sin(\alpha - \theta) - P L \cos(\alpha - \theta) = 0$$
(18)

A rigidez do sistema estrutural é definida pela segunda variação da energia potencial total, resultando em

$$\nabla^2 U(\theta) = 4KL^2 \left\{ \sin^2(\alpha - \theta) - \cos(\alpha - \theta) [\cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha)] \right\} - P L \sin(\alpha - \theta)$$
(19)

Considerando a restrição  $u_p$  e utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado, a função Lagrangiana Aumentada é escrita como

$$L(\theta) = 2 \cdot K \cdot L^2 \cdot [\cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha)]^2 - P \cdot L \cdot [\sin(\alpha) - \sin(\alpha - \theta)] +$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} &\lambda \cdot [2 \cdot L \cdot \cos(\alpha - \theta) - 2 \cdot L \cdot \cos(\alpha) - u_p] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot [2 \cdot L \cdot \cos(\alpha - \theta) - 2 \cdot L \cdot \cos(\alpha) - u_p]^2 \end{aligned} \right\}$$
(20)

Aplicando os conceitos de cálculo diferencial, obtém-se a equação de equilíbrio da estrutura

$$\nabla L(\theta) = 4 \cdot K \cdot L^2 \cdot [\cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha)] \cdot \sin(\alpha - \theta) - P \cdot L \cdot \cos(\alpha - \theta) +$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} &\lambda \cdot 2 \cdot L \cdot \sin(\alpha - \theta) + \\ &+ \xi \cdot 2 \cdot L \cdot [2 \cdot L \cdot \cos(\alpha - \theta) - 2 \cdot L \cdot \cos(\alpha) - u_p] \cdot \sin(\alpha - \theta) \end{aligned} \right\}$$
(21)

Derivando mais uma vez a equação acima, obtém-se a rigidez da estrutura

$$\nabla^2 L(\theta) = 4 \cdot K \cdot L^2 \cdot \sin^2(\alpha - \theta) - 4 \cdot K \cdot L^2 \cdot [\cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha)] \cdot \cos(\alpha - \theta)$$

$$- P \cdot L \cdot \sin(\alpha - \theta) +$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} &-\lambda \cdot 2 \cdot L \cdot \cos(\alpha - \theta) + \xi \cdot 4 \cdot L^2 \cdot \sin^2(\alpha - \theta) \\ &+ \xi \cdot 2 \cdot L \cdot [2 \cdot L \cdot \cos(\alpha - \theta) - 2 \cdot L \cdot \cos(\alpha) - u_p] \cdot \cos(\alpha - \theta) \end{aligned} \right\}$$
(22)

#### 4.1 Exemplo de barra rígida sem restrição

Nesta seção, será considerado o sistema estrutural de barras rígidas ( Figura 3) descrito no capítulo 4, mas desprezando a restrição de deslocamento no nó C, definida por  $u_p$ . São utilizados os seguintes valores: K = 100 kN/m; L = 6 m;  $\alpha = 45^\circ$  ( $\pi/4$  rd); P = 150 kN. O valor inicial do ângulo  $\theta$  adotado é igual a zero.

Resolvendo o problema pelo método de Newton, após seis iterações o sistema convergiu, ou seja, a equação de equilíbrio ( $\nabla U$ ) chegou a um valor próximo ou igual a zero, indicando que a estrutura se estabilizou. O valor obtido foi  $\theta = 0,121$  rd =  $6,88^\circ$ .

Para esse problema, em especial, a função da energia potencial total está desenhada conforme ilustra a Figura 4, a função da equação de equilíbrio é mostrada na Figura 5, e a função da rigidez do sistema está ilustrada, na Figura 6.

Analisando graficamente tais funções pelas ilustrações da Figura 4, Figura 5 e Figura 6, percebe-se que a segunda variação da energia poten-

cial total determina a estabilidade do sistema. Isso quer dizer que, quando o gradiente de segunda ordem da energia potencial total ( $\nabla^2 U$ ) for superior a zero, pode-se afirmar que o sistema é estável. Se  $\nabla^2 U$  for igual a zero, o sistema está em um ponto crítico. E caso o  $\nabla^2 U$  for inferior a zero, a estrutura será instável. Dessa forma, devem-se resolver os problemas estruturais, considerando que eles estejam sempre na situação de regime estável. A Figura 6 determina exatamente quando a função passa a ser instável. Para a configuração de equilíbrio calculada, ou seja, para o ângulo  $\theta = 0,121 \text{ rd} = 6,88^\circ$ , obtido pelo método de Newton, verifica-se que o sistema está ainda na região estável. Analisando também as funções ilustradas na Figura 4, Figura 5 e Figura 6, pode-se afirmar que a estabilidade é alcançada para pequenos valores. Para o exemplo dado, ao aplicar uma carga concentrada  $P = 150 \text{ kN}$ , o sistema converge para  $\theta \cong 6,88^\circ$ , resultando em um deslocamento horizontal no apoio C de  $\Delta \cong 0,96 \text{ m}$ .

#### 4.2 Exemplo de barra rígida com restrição

Nesta seção, será considerado o sistema estrutural de barras rígidas ( Figura 3) descrito no capítulo 4, considerando a restrição de deslocamento no nó C, definida por  $u_p$ . Os dados utilizados são os mesmos da seção 4.1, ou seja,  $K = 100 \text{ kN/m}$ ,  $L = 6 \text{ m}$ ,  $\alpha = 45^\circ (\pi/4 \text{ rd})$  e  $P = 150 \text{ kN}$ . Agora será considerada uma barreira rígida localizada a  $0,20 \text{ m}$  do nó C, ou seja,  $u_p = 0,20 \text{ m}$ . O valor inicial do ângulo  $\theta$  adotado é igual a zero. Para a análise, será considerado o parâmetro de penalidade  $\xi = 100$ .

Utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado descrito na subseção 2.5, a configuração de equilíbrio é atingida após dezesseis iterações no multiplicador de Lagrange, sendo cada iteração Lagrangiana composta por seis iterações utilizando o método de Newton, conforme Tabela 5 a seguir.

ENERGIA POTENCIAL TOTAL

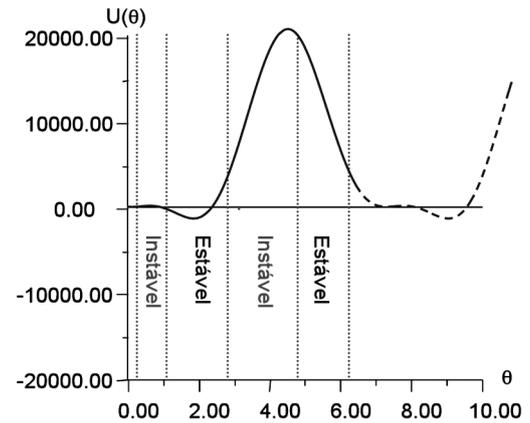


Figura 4: Função da energia potencial total

Fonte: Os autores.

EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO (Gradiente de 1ª. ordem ou 1ª. derivada)

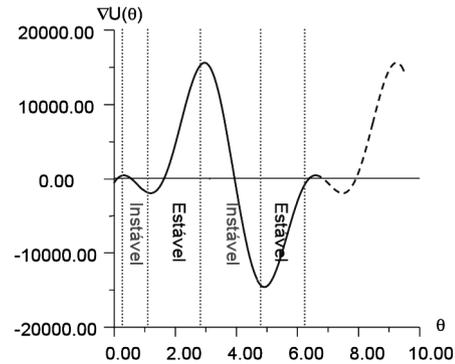


Figura 5: Função da equação de equilíbrio do sistema

Fonte: Os autores.

RIGIDEZ DO SISTEMA (Gradiente de 2ª. ordem ou 2ª. Derivada – Hessiana)

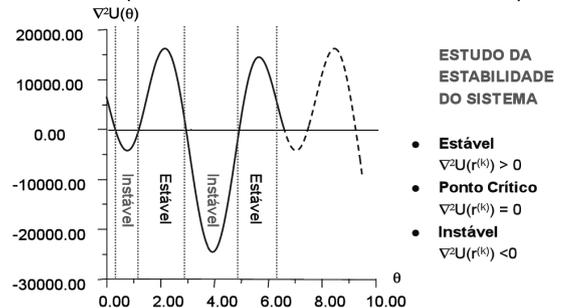


Figura 6: Função da rigidez do sistema

Fonte: Os autores.

Dessa forma, é possível perceber que a convergência nos multiplicadores de Lagrange é linear, enquanto que as minimizações sem restrições,

**Tabela 5: Resultados numéricos obtidos em cada iteração do multiplicador de Lagrange**

Inter.	$\lambda$	$\theta$	Gap	$  \nabla L  $	$\nabla^2 L$	$\Delta\lambda$
1	0	3,675	0,3265	6,00E-13	11.195	0
2	32,648	2,374	0,1442	1,00E-12	11.879	32,648
3	47,068	1,813	0,0642	5,00E-13	12.174	14,42
4	53,485	1,565	0,0286	0	12.304	6,417
5	56,35	1,456	0,0128	2,00E-12	12.362	2,865
6	57,63	1,407	0,0057	0	12.388	1,28
7	58,203	1,385	0,0026	2,00E-12	12.400	0,573
8	58,459	1,375	0,0011	0	12.405	0,256
9	58,574	1,37	0,0005	6,00E-13	12.407	0,115
10	58,625	1,368	0,0002	1,00E-12	12.408	0,051
11	58,648	1,368	0,0001	1,00E-12	12.409	0,023
12	58,658	1,367	0	6,00E-13	12.409	0,01
13	58,663	1,367	0	6,00E-13	12.409	0,005
14	58,665	1,367	0	1,00E-12	12.409	0,002
15	58,666	1,367	0	0	12.409	0,001
16	58,666	1,367	0	1,00E-12	12.409	0

Fonte: Os autores.

utilizando o método de Newton, possuem convergência quadrática.

Analisando também as funções ilustradas na Figura 4, Figura 5 e Figura 6, pode-se afirmar que a estabilidade é alcançada para pequenos valores de  $\theta$ . Para o exemplo dado, ao aplicar uma carga concentrada  $P = 150$  kN, o sistema converge para  $\theta \cong 1,37^\circ$  (0,0238571 rd), resultando em um deslocamento horizontal no apoio C de  $\Delta \cong 0,20$  m. Com isso, ocorreu o contato do nó 2 na barreira rígida e a sua reação de apoio sobre a estrutura é de 58,67 kN, sendo este o mesmo valor do multiplicador de Lagrange  $\lambda$ .

No exemplo sem restrições, o deslocamento horizontal do nó C foi 0,96 m. Obviamente, quando colocada uma barreira a 0,20 m de C ocorreria o contato do nó 2 com essa barreira.

Para não ocorrer contato, a barreira deve ser posicionada a uma distância superior a 0,96 m. Assim  $\lambda = 0$ , ou seja, não existe contato e consequentemente, reação de apoio.

Por curiosidade, se mudar a carga para  $P = 20$  kN e mantiver  $u_p = 0,20$  m, o sistema se defor-

mará de modo que o nó C não alcançará o anteparo vertical, gerando um problema sem contato, uma vez que o nó C irá deslocar  $\Delta \cong 0,10$  m. Com isso, o multiplicador de Lagrange sempre será nulo e o problema passa a ser resolvido como se fosse sem restrições.

Observando a Tabela 5, percebe-se que a Hessiana ( $\nabla^2 L$ ) é positiva, indicando que o sistema é estável.

## 5 Introdução à modelagem de estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma análise matemática que consiste na discretização de um meio contínuo em pequenos elementos, mantendo as mesmas propriedades do meio original. Esses elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos, para que sejam obtidos os resultados desejados. Os algoritmos principais utilizados nesta análise foram abordados de forma sucinta neste artigo.

A origem do desenvolvimento desse recurso ocorreu no fim do século XVIII, entretanto, a sua viabilização tornou-se possível somente com o advento dos computadores, facilitando a resolução das enormes equações algébricas. A utilização do Método dos Elementos Finitos começou no início dos anos 60 pela indústria Aeronáutica e Aeroespacial e, logo em seguida, ele passou a ser utilizado também pela indústria Automobilística e pela Engenharia Civil. Hoje no mercado há muitos programas disponíveis que executam o cálculo do MEF, os mais conhecidos são: ANSYS, PERMAS, NASTRAN, ABAQUS, DYNA3D, ADINA e CATIA. O MEF pode ser utilizado em diversas áreas das

ciências exatas e biológicas e, devido à sua grande aplicabilidade e eficiência, existem trabalhos com essa metodologia nas diversas especialidades, tais como na engenharia civil, mecânica, naval, aeronáutica, medicina e ortodontia, quando se deseja analisar cargas, tensões, deslocamentos ou deformações. Com o contínuo uso desse método em pesquisas, por suas vantagens em relação a outros disponíveis, torna-se de suma importância o conhecimento da técnica, para que sua utilização possa proporcionar benefícios científicos. É primordial que todos os profissionais conheçam os conceitos básicos do MEF de maneira que os resultados dos trabalhos sejam mais bem interpretados. O MEF é amplamente utilizado para modelar, analisar e detalhar os projetos de estruturas em geral. Suas formulações estão apresentadas em Bathe (1996) e Zienkiewicz et al. (2005). Em geral, ele é usado para analisar estruturas convencionais (otimização sem restrições), isto é, sem contato mecânico ou impacto.

É importante mencionar que os problemas de contato e de impacto mecânico, são extremamente complicados, na maioria dos casos, tornando esse assunto um dos mais completos e complexos na mecânica computacional. Além de a análise ser não-linear, podem englobar teorias, como a dinâmica não-linear, campos acoplados de temperatura, elastoplasticidade, entre outros assuntos.

Neste artigo, quando foram aplicados os métodos de programação matemática com restrições, foi dada ênfase aos problemas de contato. No contexto do MEF, quando uma estrutura é carregada e se deforma atingindo outra ou tocando em qualquer outro sólido, se diz que a estrutura sofre contato mecânico ou impacto mecânico. Esse problema é formulado pela programação matemática, como por exemplo, adicionando restrições aos deslocamentos (conforme exemplos apresentados nos capítulos 3 e 4).

A análise dos problemas de contato é um estudo recente. Para solucioná-los, utiliza-se o método do Lagrangiano Aumentado, que já se consagrou como uma técnica bastante eficiente. As formulações de contato mecânico estão apresentadas em Bandeira et al. (2001, 2003, 2004 e 2005) e Wriggers (2002). As formulações da programação matemática ou otimização estão presentes em Bertsekas (1995), Fletcher (1980), Herskovits (1995) e Luenberger (1984).

### 5.1 Introdução básica da formulação do Método dos Elementos Finitos

As formulações do MEF são amplamente descritas em Bathe (1996) e Zienkiewicz et al. (2005). Por questões óbvias esses assuntos não serão aqui descritos. No entanto, nesta seção, será introduzida de forma objetiva a formulação geral escrita por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais para obter o vetor equilíbrio e a matriz de rigidez da estrutura. Uma vez conhecidos o que se chama de primeira e segunda variação da energia potencial total da estrutura, os algoritmos apresentados neste artigo são diretamente aplicados nas modelagens de elementos finitos.

O princípio do trabalho virtual é uma formulação equivalente do balanço de momento. Ele pode ser definido na configuração inicial como

$$\delta W(\boldsymbol{\varphi}, \delta \mathbf{u}) = \int_B \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV_0 - \int_B \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV_0 - \int_{\partial B_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA_0 = 0 \quad (23)$$

em que  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}$  é o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff;  $\mathbf{u}$ , o deslocamento;  $\mathbf{E} = 1/2 (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$ , o tensor das deformações de Green-Lagrangian;  $\mathbf{F}$ , o gradiente das deformações;  $\mathbf{P}$ , o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff;  $\rho_0$ , a densidade na configuração de referência;  $\bar{\mathbf{b}}$ , a força de volume por unidade de

massa;  $\rho_0 \bar{b}$  define a força volumétrica,  $\bar{t}$  é o vetor das tensões associado com o vetor normal da superfície  $n$ ,  $J = \det F$  define o determinante do Jacobiano (que deve ser maior que zero) e  $\bar{\tau}$  é o tensor de Kirchhoff. A matriz de rigidez é obtida por meio da linearização da expressão (23). Logo,

$$DW(\bar{\varphi}, \bar{\eta}) \cdot \Delta u = \int_B \{ \overline{\text{grad}} \Delta u \bar{\tau} \cdot \overline{\text{grad}} \bar{\eta} + \nabla^S \bar{\eta} \cdot \overline{\text{div}}^S \Delta u \} dV_0 \tag{24}$$

A contribuição do contato à equação de equilíbrio (23) é definida da seguinte maneira:

$$\delta W_c(u, \delta u) = \int_{\partial B_c^s} t_N \delta g_N dA + \int_{\partial B_c^s} t_{T\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha dA \tag{25}$$

e a contribuição do contato na matriz de rigidez da estrutura expressa em (24), é definida por

$$\frac{\partial W_c}{\partial u} \Delta u = \int_{\partial B_c^s} [\Delta t_N \delta g_N + t_N \Delta(\delta g_N)] dA + \int_{\partial B_c^s} [\Delta t_{T\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha + t_{T\alpha} \Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)] dA \tag{26}$$

Nas expressões (25) e (26),  $t_N$  é a pressão de contato,  $t_T$  é a força tangencial de atrito,  $\bar{n}_c$  é a normal interna no ponto escravo  $x^s$ ,  $\delta g_N$  é a variação no tempo do vetor normal e  $\Delta$  é a variação em relação aos deslocamentos. Essa formulação do contato está detalhada em Bandeira (2001). Quando o problema de contato envolve atrito, existe a não-simetria da matriz de rigidez devido ao termo  $\Delta t_{T\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha$  em (26). O algoritmo usado para integrar as equações do atrito é completamente demonstrado em Bandeira (2001). Em geral é usada a lei não-associada do atrito de Coulomb. Para a análise de estruturas em geral, o sistema é conservativo, tornando a matriz de rigidez da estrutura simétrica. A simetria somente é perdida quando é introduzida ao sistema grandeza que o torne não-conservativo, como é o caso do atrito considerado no contato mecânico.

## 5.2 Exemplo de aplicação utilizando o MEF - Otimização sem restrição

O exemplo desta seção é bastante simples. Trata-se de uma chapa submetida a um carregamento de tração. O objetivo é determinar as tensões normais ( $\sigma_x$ ) atuantes na barra chata com orifício circular correspondente à ação do fuste do parafuso de fixação. As dimensões da seção transversal da barra chata estão informadas na Figura 7. O material é de aço ( $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,3$ ) e está sujeito a uma força normal  $F = 20\text{kN}$  (tração). Considere a tensão admissível do aço  $\sigma_{adm} = 250 \text{ MPa}$  e a tensão de cisalhamento  $\tau_{adm} = 125 \text{ MPa}$ .

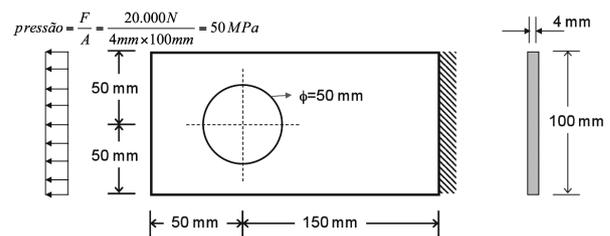


Figura 7: Exemplo de Estado Plano de Tensão

Fonte: Os autores.

Utilizando um programa de elementos finitos, como por exemplo, o ANSYS, NASTRAN ou CMAP (Contact Mechanics Analysis Program), programa desenvolvido de 1996 a 2010, por Bandeira (2001) todos mostram as seguintes tensões normais, ilustradas na Figura 8.

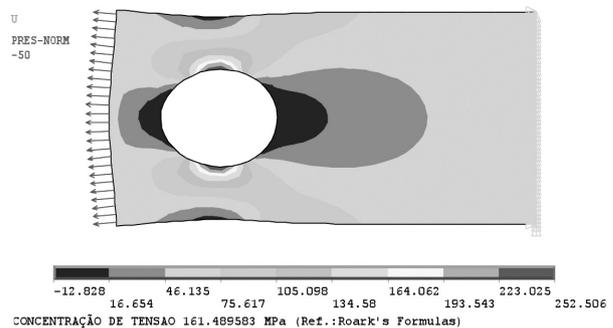
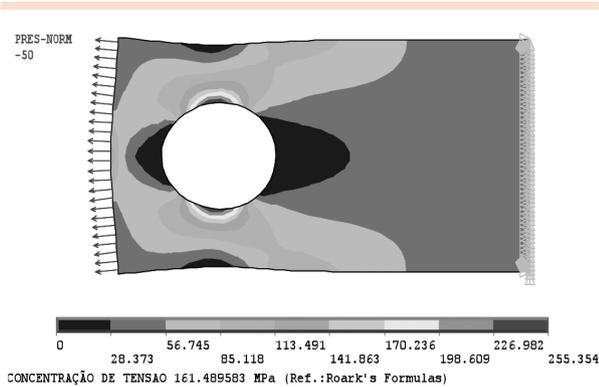


Figura 8: Tensão normal  $\sigma_x$

Fonte: Os autores.

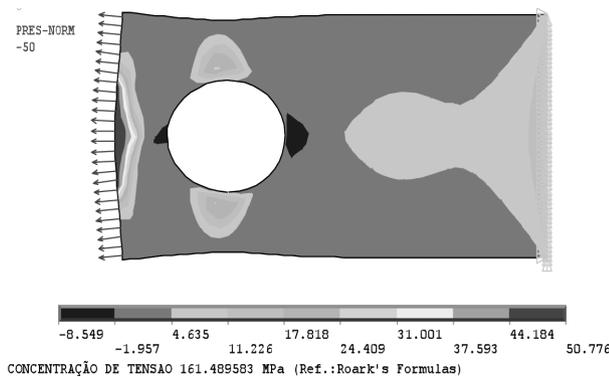
A Figura 9, Figura 10 e Figura 11 ilustram, respectivamente, as tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ .



**Figura 9: Tensão principal  $\sigma_1$**

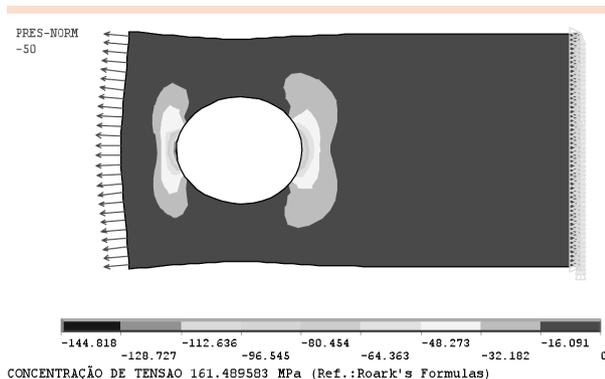
Fonte: Os autores.

Observa-se que o furo eleva a tensão normal na ordem de 50 MPa para 255,354 MPa (tensão principal  $\sigma_1$ ), superando a tensão admissível.



**Figura 10: Tensão principal  $\sigma_2$**

Fonte: Os autores.



**Figura 11: Tensão principal  $\sigma_3$**

Fonte: Os autores.

O cálculo da tensão máxima pode ser realizado por meio da fórmula analítica de Roark, definida por

$$\sigma_{m\acute{a}x} = k \cdot \frac{\sigma_a \cdot D}{(D-d)}, \text{ sendo } k = 3 - 3,13 \cdot \left(\frac{d}{D}\right) + 3,66 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2 - 1,53 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^3 \quad (27)$$

Aplicando a fórmula (27), no exemplo, obtém-se a tensão normal máxima na chapa

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \left[ 3 - 3,13 \cdot \left(\frac{50}{100}\right) + 3,66 \cdot \left(\frac{50}{100}\right)^2 - 1,53 \cdot \left(\frac{50}{100}\right)^3 \right] \cdot \frac{50 \times 100}{(100 - 50)} = 215,9 \text{ MPa} \quad (28)$$

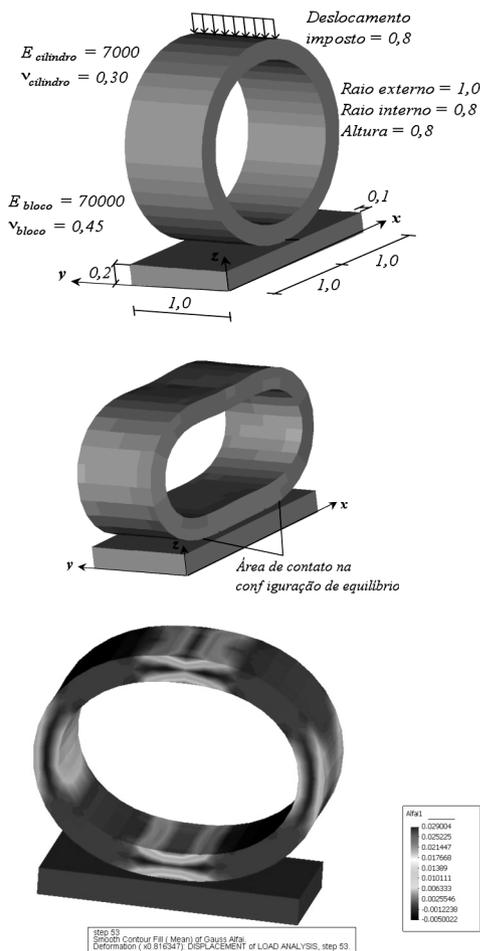
O valor em (28) foi inferior ao resultado obtido pelo MEF (aproximadamente 15,45% de diferença). É importante ressaltar que a modelagem utilizando o MEF é de extrema valia para a engenharia estrutural, uma vez que por meio de modelos refinados e com o estudo da convergência dos resultados, pode-se obter soluções praticamente exatas, ou seja, compatível com a realidade física do problema.

### 5.3 Exemplo de aplicação utilizando o MEF - Otimização com restrição

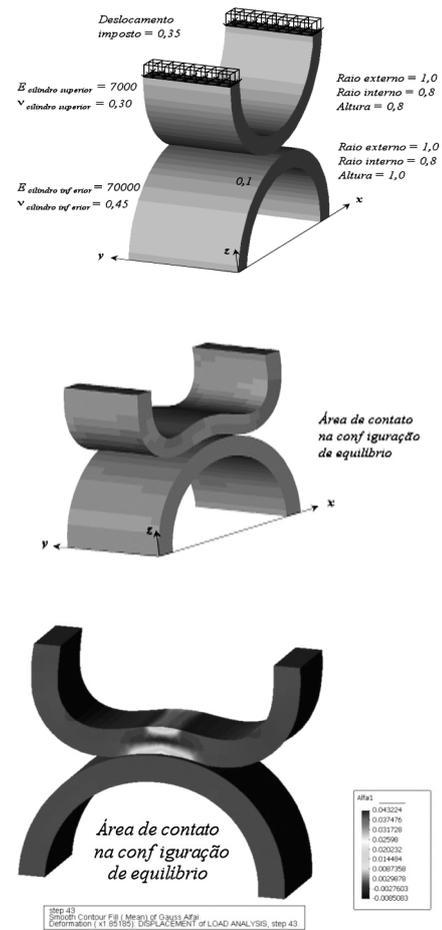
Nesta seção, são apresentados alguns exemplos de contato. Cabe salientar que não serão explicados os exemplos de simulação, mas sim, mostrados alguns resultados obtidos por meio da modelagem utilizando o MEF.

Os exemplos ilustrados na Figura 12 e na Figura 13, quando analisados em regime elástico não-linear (material de Neo-Hooke), são encontrados em Bandeira (2001). Esses exemplos foram re-analisados em regime não-linear, considerando a elastoplasticidade com encruamento baseado nas tensões de Von-Misses nas direções principais, em Bandeira et al. (2010). Também foram acrescentados os efeitos do atrito e da micromecânica desenvolvida na interface de contato, ou seja, foram levadas em consideração as asperezas das superfícies de contato.

Analisando a Figura 12 e Figura 13, percebe-se que as deformações são maiores nos problemas elásticos. Quando é introduzida a plasticidade ao problema, definindo as tensões de escoamento dos materiais, verifica-se nas simulações numéricas que quando as estruturas foram analisadas, considerando o regime elastoplástico, para o mesmo carregamento, elas entraram em escoamento atingindo a ruptura. Isso se deve ao fato da tensão de escoamento do material ser inferior às tensões resultantes no modelo elástico. Dessa forma, no momento da ruptura, as deformações foram menores quando comparadas com o modelo elástico.



**Figura 12: Problema na configuração indeformada, análise elástica e análise plástica**  
 Fonte: Os autores.



**Figura 13: Problema na configuração indeformada, análise elástica e plástica**  
 Fonte: Os autores.

## Conclusões

Neste artigo, apresentaram-se, de forma objetiva, os métodos implícitos mais usuais aplicados à análise não-linear de estruturas. Foi abordado de maneira sucinta, como resolver alguns problemas estruturais a partir de métodos matemáticos citados anteriormente. Pôde-se notar que por meio da formulação da energia potencial total de um sistema conservativo, são aplicados importantes conceitos da resistência dos materiais, desenvolvimentos de formulações estruturais e conceitos de análise matricial de estruturas. Esses foram utilizados para

resolver os problemas, expostos nos capítulos 3 e 4, para determinar os deslocamentos. Foram utilizadas técnicas de otimização com restrições aplicadas à análise não-linear de estruturas, em especial, aos problemas de contato mecânico.

No início, foi realizada uma contribuição didática, apresentando exemplos de sistemas estruturais conservativos submetidos ao contato mecânico sem atrito e as respectivas soluções desses problemas, utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado. Para cada exemplo, foi destacada a convergência do método e o entendimento do algoritmo. No exemplo das molas, adicionou-se a não-linearidade física das molas para tornar o sistema não-linear (não-linearidade física e geométrica), conforme Bandeira (1997). O sistema estrutural formado por barras rígidas, apresentado no capítulo 4, descreve detalhadamente a sua formulação teórica baseada no Método da Energia, sua interpretação geométrica da solução do problema e sua solução numérica, utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado. Esse exemplo é inovador, quando acrescentada uma barreira para simular um problema de contato. Dessa forma, a abordagem apresentada contribui para um melhor aprendizado do tema.

No final do estudo, é apresentado, de forma sucinta, o princípio dos trabalhos virtuais para os problemas de contato mecânico no contexto do Método dos Elementos Finitos e alguns exemplos numéricos de simulações de contato com atrito em regime elastoplástico sob grandes deformações, de acordo com Bandeira et al. (2010). Com isso, a ideia é mostrar que esses métodos são amplamente utilizados nas modelagens em que se usa o Método dos Elementos Finitos, um facilitador na resolução de tais questões na engenharia civil. Para os usuários dos programas de elementos finitos, após a entrada de dados no pré-processamento, a estrutura é calculada por meio do solver do programa para, em seguida, analisar os resultados no pós-processamento. E é justamente durante o

processamento dos programas de elementos finitos, que os conceitos de otimização estrutural são utilizados a fim de solucionar os sistemas de equações não-lineares com ou sem restrições. Essa parte é despercebida pela maioria dos usuários que não tem a formação matemática e numérica da mecânica computacional. De forma geral, esses assuntos não são abordados em cursos de graduação nas engenharias. Usualmente, tais conceitos são adquiridos em cursos de pós-graduação stricto sensu ou por alunos de graduação envolvidos em pesquisas de iniciação científica.

Dessa maneira, é importante mencionar que o principal objetivo neste artigo é ressaltar a importância dos métodos e dos algoritmos de programação matemática aplicada que auxiliam os programas computacionais de elementos finitos.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal da Bahia, em especial ao seu Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica, e aos órgãos de fomento à pesquisa – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) e PIBIC-UFBA – pelas bolsas de iniciação científica concedidas aos alunos envolvidos no projeto de pesquisa.

## Referências

- BANDEIRA, Alex Alves. Uma introdução à análise de problemas de contato. São Paulo, 1997. 146p. Dissertação (Mestrado)–Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.
- \_\_\_\_\_. Análise de problemas de contato com atrito em 3D. São Paulo, 2001. 276 p. Tese (Doutorado)–Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

\_\_\_\_\_; PIMENTA, Paulo de Mattos; WRIGGERS, Peter. Numerical simulation of 3D contact problems under finite elastic-plastic deformation. In: 7th US National Congress on Computational Mechanics, Albuquerque, New Mexico, USA, 2003.

\_\_\_\_\_; PIMENTA, Paulo de Mattos; WRIGGERS, Peter. A 3D contact surface study considering elastoplastic behavior of the asperities. In: 4th Contact Mechanics International Symposium, University of Hannover, 2005.

\_\_\_\_\_; PIMENTA, Paulo de Mattos; WRIGGERS, Peter. A 3D study of the contact interface behavior using elastoplastic constitutive equations. In: 7th International Conference on Computer Methods and Experimental Measurements for surface effects and contact mechanics, Bologna, Italy, 2005.

\_\_\_\_\_; PIMENTA, Paulo de Mattos; VIEIRA JR., A. B.; RIBEIRO Jr., A. S. Numerical simulation of contact problems under large 3d elastoplastic deformation. In: 2nd INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING OPTIMIZATION, Lisbon, 2010.

\_\_\_\_\_; WRIGGERS, Peter; PIMENTA, Paulo de Mattos. Computational analysis of contact mechanics undergoing large 3D deformation. In: European Conference on Computational Mechanics, Krakow, Poland, 2001.

\_\_\_\_\_; WRIGGERS, Peter; PIMENTA, Paulo de Mattos. Homogenization Methods Leading to Interface Laws of Contact Mechanics – A Finite Element Approach for Large 3D Deformation using Augmented Lagrangian Method. In: 3rd Contact Mechanics International Symposium, Peniche, Portugal, 2001.

\_\_\_\_\_; WRIGGERS, Peter; PIMENTA, Paulo de Mattos. Numerical derivation of contact mechanics interface laws using a finite element approach for large 3D deformation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004.

BATHE, K. J. Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

BERTSEKAS, D. P. Nonlinear programming. Belmont, Mass: Athena Scientific, 1995.

\_\_\_\_\_. Constrained optimization and Lagrange multiplier methods. New York, USA: Academic Press, 1984.

FLETCHER, R. Practical methods of optimization. Chichester, England: Wiley, 1980. 2 v.

HERSKOVITS, J. Advances in structural optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. v. 25. (Series: Solid Mechanics and its Applications).

LUENBERGER, D. G. Linear and nonlinear programming. 2. ed. Massachusetts: Reading, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

WRIGGERS, P. Computational contact mechanics. England: John Wiley & Sons Ltd, 2002.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., ZHU, J. Z. Finite element method: its basis & fundamentals. 6th ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

Recebido em 24 jun. 2010 / aprovado em 15 nov. 2010

**Para referenciar este texto**

BANDEIRA, A. A. et al. Algoritmos de otimização aplicados à solução de sistemas estruturais não-lineares com restrições: uma abordagem utilizando os métodos da Penalidade e do Lagrangiano Aumentado. *Exacta*, São Paulo, v. 8, n. 3, p. 345-361, 2010.

