





A dificuldade em transferir conhecimentos de um contexto para outro, em disciplinas distintas, ou mesmo internamente a uma única disciplina, atinge tanto alunos quanto professores. Optamos por fazer um estudo com o tema Geometria das Transformações, em razão das importantes conexões que a Geometria possibilita com outras áreas do conhecimento, em contextos distintos e em diferentes níveis de ensino – fundamental, médio ou superior.

Dada a abrangência do tema, o presente trabalho limita-se a um estudo envolvendo a simetria<sup>1</sup> axial ou reflexão, em situações pautadas num contexto característico da Física (reflexão da luz em espelhos planos) e em outro nitidamente matemático (simetria axial).

1. A palavra simetria é usada, geralmente, num sentido mais amplo, para indicar proporções bem estabelecidas, medidas harmoniosas ou equilíbrio estético.

A falta de articulação entre assuntos distintos dentro do próprio componente curricular, no caso a Matemática, e a ausência de conexões entre um mesmo tema abordado em diferentes contextos, por exemplo, Matemática e Física, contribuem para uma visão fragmentada, em que não existe relação entre os conteúdos, nem destes com a realidade. Um exemplo em Geometria das Transformações é a simetria, abordada em Matemática, e a reflexão, estudada em Óptica Geométrica, na Física, geralmente vistas como assuntos que não apresentam nenhuma relação, temas completamente diferentes.

O interesse particular pela simetria, dentro da Geometria das Transformações, refere-se à grande variedade de aplicação dos princípios desta nos mais diversos e diferentes contextos e áreas de conhecimento: Química, Biologia, Física, Matemática, Escultura, Pintura, Música, Arquitetura e outros.

## II. Quadro teórico

Este estudo considerou os resultados das pesquisas de Küchmann (1985), Grenier (1985) e Healy (2001) sobre simetria; Mabuchi (2000), sobre Transformações Geométricas, e Boaler (1993), sobre a transferência de conhecimentos.

O projeto inglês *Concepts in Secondary Mathematics and Science – CSMS* realizou, em 1981, uma pesquisa coordenada por Küchmann, com estudantes de 11 a 16 anos de idade, cujo objetivo era a investigação da compreensão sobre 11 temas matemáticos. Neste mesmo projeto, em 1985, 1026 estudantes responderam a questões sobre isometrias (suas reflexões, rotações e composições). Nas questões relativas à reflexão, foram consideradas as influências dos seguintes fatores: a) complexidade da figura (ponto, segmento de reta ou triângulo, ou outra); b) presença ou ausência de malha quadriculada; c) posição do eixo de simetria (horizontal ou vertical); d) distância entre a figura objeto e o eixo de simetria. A pesquisa desenvolvida por Küchmann constitui





formação escolar precária), se comparada a situações escolares com problemas formais, pouco relacionados com sua realidade ou que estejam em contextos distantes de sua vivência e experimentação no dia-a-dia.

### III. Procedimentos

Para comparar as estratégias e os tipos de erros cometidos pelos professores, utilizamos, em nossa amostragem, dois questionários: um sobre aspectos relacionados à formação acadêmica e atividade profissional desenvolvida, e outro, sobre questões abordando simetria axial. Os questionários foram respondidos voluntariamente por docentes que participavam de um projeto denominado Pró-Ciências (de Matemática e de Física), realizado na PUC-SP com financiamento da FAPESP.

Para tentar compreender melhor essa questão, aplicamos questionários sobre simetria axial e reflexão em espelhos planos a dois grupos de professores de Física e de Matemática, em exercício nas escolas públicas de Ensino Médio da cidade de São Paulo. O grupo foi convidado a resolver, individualmente, questões postas em contextos próprios da Física e da Matemática.

As questões propostas são semelhantes àquelas apresentadas por Küchmann e Grenier. As variáveis didáticas consideradas foram: a) posição relativa entre objeto e espelho (ou figura-objeto e eixo de simetria); b) inclinação do espelho (ou do eixo de simetria), e c) tipo de papel utilizado. Também foi considerado o uso de espelho ou de eixo de simetria e o emprego de dobradura como técnica de solução.

Os resultados apontaram as estratégias utilizadas e os erros cometidos.

### IV. Resultados

Os resultados encontrados apresentam estratégias de solução que envolvem, em geral, equidistância, perpendicularidade, conservação de ângulos e dobradura. Fatores como tipo de papel (branco ou quadriculado), complexidade da figura, inclinação relativa eixo-figura também foram considerados.

Uma das questões propostas solicitava aos docentes que determinassem o campo visual do espelho plano retrovisor de um automóvel, em diferentes posições, para um observador situado em  $O$  e assinalassem os pontos que poderiam ser vistos, por reflexão, no espelho mencionado. As Figuras 1 e 2, indicadas a seguir, ilustram parte desta questão:

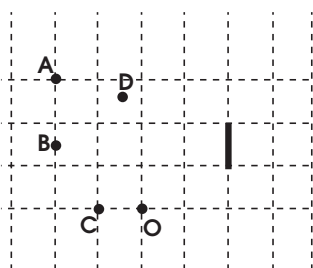


Figura 1

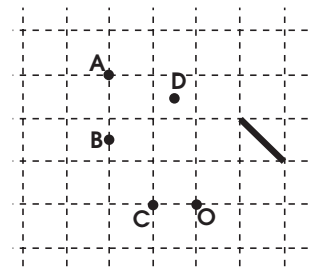


Figura 2

A posição inclinada do espelho foi um fator dificultador para a maioria dos indivíduos dos grupos, tendo provocando um crescimento no número de erros cometidos, tal como Küchmann e Grenier haviam constatado em seus experimentos. Observou-se também um questionamento por parte dos professores sobre a posição de O (que não estava diante do espelho) e a possibilidade de que viesse a enxergar as imagens dos pontos no espelho.

Outra questão, indicada nas Figuras 3a e 3b a seguir, solicitava aos docentes que completassem a figura, desenhando a figura simétrica de cada bandeirinha em relação ao segmento de reta indicado.

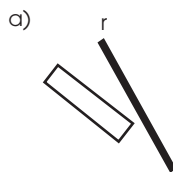


Figura 3a

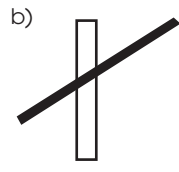


Figura 3b

Em outro item desta mesma questão, a figura estava desenhada sobre malha quadriculada, conforme indicação na Figuras 3c.

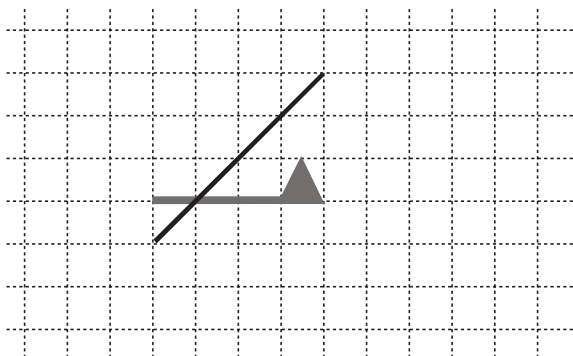


Figura 3c



Este último conjunto de questões apresentou, predominantemente, em suas respostas, a equidistância e a perpendicularidade como estratégias de solução. A presença da malha, no caso em que há coincidência entre os vértices da figura e os da própria malha e do eixo de simetria com uma de suas linhas, não constitui um fator dificultador; ao contrário, a malha foi usada como ferramenta para a determinação de pontos equidistantes e perpendiculares.

Em outra questão, entretanto, a presença da malha quadriculada constituiu uma dificuldade a mais. A Figura 4 indica este caso:

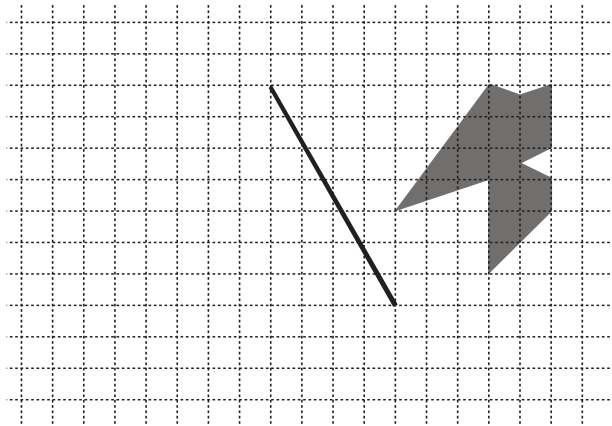


Figura 4

Os vértices da figura nem sempre se localizam sobre os da malha; a figura não é familiar e o eixo está inclinado em relação a ela.

Foram observados erros na determinação da figura simétrica como, por exemplo, o indicado na Figura 5, na qual Hoyles (2001) questiona a possibilidade de uma interpretação em três dimensões (espacial), em que tal representação da figura simétrica estaria correta.

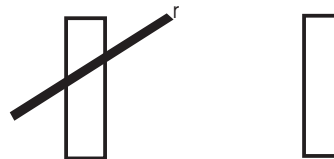


Figura 5

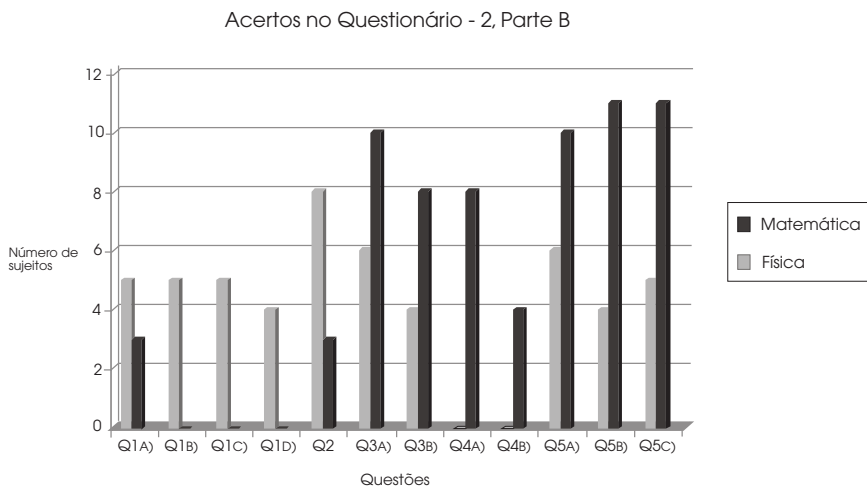
Foi possível observar que alguns dos docentes adotaram, em suas soluções, a estratégia de conservação de ângulos para as questões no contexto físico, o que pode ser associado à segunda lei da reflexão em espelhos. Entretanto, em situações do contexto matemático, adotaram-se, como estratégias de solução, a





Este gráfico mostra que as questões no contexto de Física (1 e 2) apresentaram índices de acerto mais alto para o grupo de Física que para o de Matemática, assim como os sujeitos de Matemática superaram os de Física nas questões sobre Matemática (3, 4 e 5).

No questionário-2, Parte B, ocorre situação análoga a esta. Além de os acertos estarem relacionados ao contexto e à atividade desenvolvida, as estratégias escolhidas para questões similares modificam-se conforme o contexto.



As questões 1 (itens A, B, C e D) e 2, que apresentam situações típicas de obtenção de imagem em espelho plano, deixaram de ser resolvidas pelos docentes de Matemática (conforme gráfico anterior), enquanto a totalidade dos professores de Física não respondeu à questão 4 (itens A e B), com contexto de Geometria Analítica.

Quanto aos procedimentos e estratégias de solução, foi observado que os professores (principalmente os de Física) adotam a equidistância e a perpendicularidade para questões com contexto matemático, e a conservação de ângulos, para aquelas com contexto físico, provavelmente pela influência da segunda lei da reflexão que trata da congruência entre os ângulos de incidência e reflexão em espelhos.

A conservação de ângulos é uma solução que pode ser considerada uma aplicação da segunda lei da reflexão, usada, preferencialmente, por docentes de Física nas questões com contexto físico. Este procedimento não é, em geral, mantido para as demais questões, o que sugere que não há uma transferência de conhecimentos de um contexto para outro, mas uma estratégia específica para cada contexto.



A dificuldade na transferência de conhecimentos matemáticos de uma situação para outra pode ser constatada pelas diferentes abordagens das questões. Comparando-se os dois grupos de professores, pôde-se verificar que há estratégias que são mais freqüentes em determinado grupo, embora seja possível que sua utilização esteja mais ligada ao contexto das situações propostas do que às práticas docentes.

Como já dito, os resultados apontam, dada a não manutenção de uma estratégia única para situações análogas, que não houve uma transferência de conhecimentos de um contexto para outro.

Os resultados deste estudo são semelhantes aos encontrados por Boaler (1993) e outros pesquisadores no que se refere à transferência de conhecimentos. O autor defende a idéia de que o aprendizado em situações contextualizadas pode facilitar a compreensão e a transferência de conhecimentos em razão das conexões que são estabelecidas entre os procedimentos formais da Matemática e os métodos informais dos alunos. No entanto, o aprendizado é uma construção individual e complexa e, portanto, não há garantia de que um aprendizado contextualizado levará, necessariamente, a uma transferência de conhecimentos.

É provável que a forma como os conteúdos de Matemática e de Física são geralmente apresentados possa constituir um fator dificultador da transferência dos conhecimentos. Via de regra, tais conteúdos são definidos e apresentados como verdades inquestionáveis, produtos concluídos, cabendo ao estudante somente o papel de reproduzir os procedimentos indicados pelo professor em situações semelhantes aos modelos.

A questão da formação de professores não foi objeto desta pesquisa, mas constitui, sem dúvida, uma continuidade interessante para este trabalho.

Será que a formação de professores não poderia levar ao desenvolvimento de habilidades de modelização de situações em contextos distintos, valorizando-as e ‘exercitando’ a transferência e a articulação de conhecimentos entre diferentes tópicos dentro de uma mesma área e entre áreas distintas? Será que tal formação não poderia favorecer a transferência de conhecimentos, a princípio, para o próprio professor e, em seguida, para seus alunos?

#### Referências bibliográficas

BOALER, J. Encouraging the transfer of “school” mathematics to the “real world” through the integration of process and content, context and culture. *Educational Studies in Mathematics*, n. 25 p. 341-373. Kluwer Academic Publishers, 1993.



BRANSFORD, J.; BROW, A.; COCKING, R. *How people learn: Brain, Mind, Experience, and School*. Disponível em <[www.nap.edu/html/howpeople1/ch3.html](http://www.nap.edu/html/howpeople1/ch3.html)>. Acessado em 22/03/2003.

CATALÁ, C. A., GÓMEZ, R.P; GARRIDO, C.R. *Simetria Dinámica*. Madrid: Síntesis, 1989.

EDWARDS,L.; ZAZKIS, R. Transformation Geometry: Naive Ideas and Formal Embodiments. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, n.12 (2), p.121-145, 1993.

GRENIER, D. Quelques aspects de la symétrie Orthogonale pour des élèves de classes de 4<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup>. *Petit x*, n.7, p.54-69, Grenoble, 1985.

HEALY, L. *Iterative design and comparison of learning systems for reflection in two dimensions*. Tese de Doutorado. 2001. Institute of Education, University of London.

HOYLES, C.; HEALY, L. Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, n. 2, p. 27-59. Kluwer Academic Publishers, London, 1997.

HOYLES, C.; HEALY, L. Un micro-monde pour la symétrie axiale: une base de co-construction de concepts mathématiques. *Sciences et techniques éducatives*. v. 4, n. 1, p. 67-97, 1997.

JAHN, A. P. *Des transformations de figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre*. Tese de Doutorado. 1998. Université Joseph Fourier, Grenoble.

NOSS, R.; POZZI,S.; HOYLES, C. Touching epistemologies: statistics in Education practice. *Educational Studies in Mathematics*. n.40, p.25-51, 2000.

NUNES, T.; SCHIEMANN, A. D.; CARRAHER, D.W. *Street Mathematics and School Mathematics*. Cambridge. Cambridge University Press, 1993.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques - RDM*, n.10 (2.3), p.133-169. Grenoble, 1990.

WEYL, Hermann. *Simetria*. São Paulo: EDUSP, 1980.