ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE A TEORIA FUZZY

SUZANA ABREU DE OLIVEIRA SOUZA
Doutora em Matemática Aplicada -IME- USP e Professora do Curso de Licenciatura em Matemática no Departamento de Ciências Exatas na UNINOVE

Resumo

Este artigo é uma introdução à teoria *fuzzy*. A intenção é não só provocar curiosidade ao leitor sobre o tema, mas também apresentar as idéias básicas desta teoria, já que não existem ainda, em língua portuguesa, livros introdutórios que versem sobre o assunto. Começamos apresentando a noção de conjunto *fuzzy*, com exemplos, e depois comentamos a lógica desta teoria.

Palavras-chave: *teoria fuzzy; conjuntos fuzzy; lógica fuzzy.*

Abstract

This is an introductory article about fuzzy theory. The intention is not only to raise curiosity in the reader about the theme, but also present basic ideas of this theory, since there are not introductory books about this in the Portuguese language. We start presenting the notion of fuzzy sets, with examples, and then, we make some comments on fuzzy logic.

Key words: *fuzzy theory; fuzzy sets; fuzzy logic.*

1. Introdução

A palavra inglesa *fuzzy* tem como tradução alguns sinônimos: nebuloso, vago, incerto. Estes conceitos, particularmente, sempre incomodaram o ser humano. Problemas como: "Um homem tem a cabeça repleta de cabelos e, a partir de um certo momento, começa-se a extração de fios, um a um, e a cada fio retirado pergunta-se se ele está calvo. Em que momento exatamente este homem ficará calvo?" (RUSSEL, 1917: 37). Se repetirmos indefinidamente este processo, ele ficará calvo e até careca. Mas será que podemos definir a partir de qual fio de cabelo ele se tornará calvo?

Paradoxos como este existem desde a Grécia antiga, e o trecho citado foi apresentado por Bertrand Russell (1872-1970) no início do século XX. Foi também neste período, precisamente em 1937, que um filósofo quântico chamado Max Black (1909 –1989) publicou o artigo *Vagueness: an exercise in logical analysis*, texto precursor da idéia de conjunto *fuzzy*. Black usou o termo 'vago' porque os filósofos da época, como Bertrand Russell, o usavam para chamar o que hoje denominamos *fuzzy*. Naquela quadra histórica, ninguém deu atenção ao seu artigo, que estava fadado ao esquecimento. Alguns anos depois, em 1965, o engenheiro elétrico Lofti A. Zadeh (1921...) lançou seu primeiro artigo chamado *Fuzzy Sets*. A influência de Zadeh, proeminente professor da U. C. Berkeley, ajudou bastante a divulgar suas idéias, tanto que hoje é considerado o precursor da Teoria *Fuzzy*.

A partir de então, teorias e aplicações têm surgido, e algumas das principais áreas em que encontramos a teoria *fuzzy* são: sistemas de controle *fuzzy*, tomada de decisão, reconhecimento de padrões e processamento de imagens e controle de epidemias na Medicina e Biologia. Na Medicina, por exemplo, os principais focos têm sido a modelagem dos processos de diagnóstico de doenças (SANCHEZ, 1979) e epidemiologia (ORTEGA, 2000). Na Biologia, modela-se a dinâmica de população. Em Barros (1992), são consideradas basicamente duas situações: uma, quando se acredita que o meio no qual vivem os indivíduos interfere fortemente na dinâmica da população; a outra trata de classificar presa e predador, conceitos apresentados com base na teoria *fuzzy*.

O sucesso das aplicações motivou de tal forma o desenvolvimento da teoria *fuzzy* que hoje em dia máquinas de lavar roupas e outros eletrodomésticos são desenvolvidos usando, para seu funcionamento, esta lógica.

2. Conjuntos *Fuzzy*

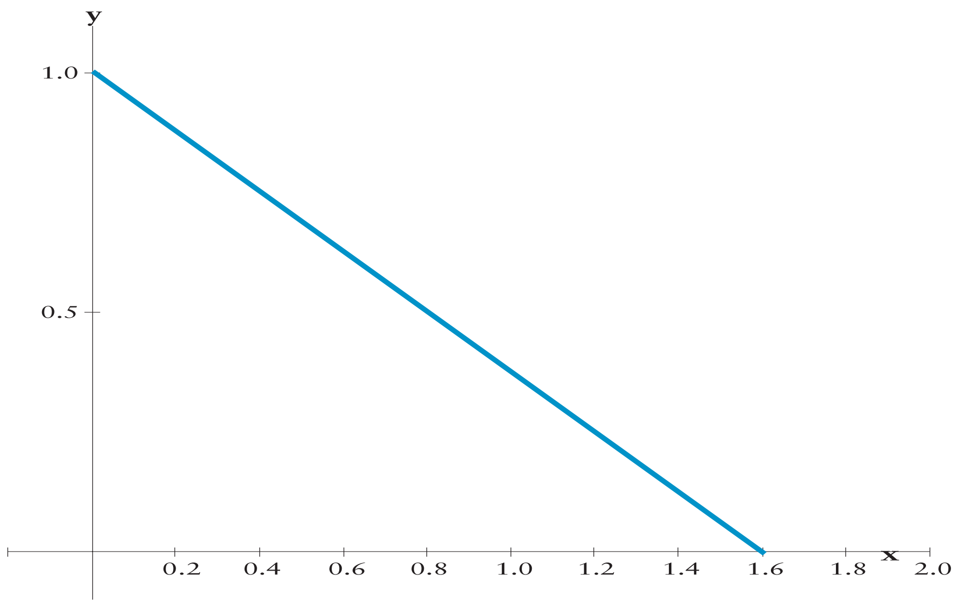
Para classificarmos uma figura geométrica plana, podemos nos referir a alguns conjuntos, tais como: o conjunto das circunferências, o dos triângulos, o dos retângulos, o dos quadrados, e assim por diante. Ao observarmos as características de uma figura geométrica, temos condições de determinar se ela pertence ao conjunto dos triângulos ou não. No entanto, nem todas as classificações seguem estes parâmetros. Por exemplo: se quisermos classificar pessoas pela altura, ou seja, pessoas altas e pessoas baixas, estes conjuntos não estarão tão bem definidos quanto os das figuras geométricas planas citados. Dependendo do lugar geográfico utilizado para a classificação, estes parâmetros poderão mudar, e muito.

Digamos que x seja a altura em metros de um indivíduo e que o conjunto A das pessoas baixas esteja definido da seguinte maneira: $A = \{x;\ x<1{,}60m\}$. A pergunta é: Uma pessoa que tem 1,30m é tão baixa quanto uma que mede 1,59m? No entender cotidiano, não. Neste ponto entra a noção de pertinência introduzida por Zadeh e a definição de conjunto *fuzzy*: a noção deste conjunto generaliza o conceito de pertinência de um elemento ao conjunto, 'medindo' seu 'grau de pertinência' por meio de uma função que parte do conjunto (cujos elementos devem ser classificados) e chega ao intervalo fechado real [0, 1].

Vamos ilustrar o exemplo acima:

Considere $A = \{x;\ x<1,60m\}$ como acima; X o conjunto das pessoas a serem classificadas e $u\colon X \to [0,1]$ uma função do conjunto dos elementos a serem classificados como X, no intervalo fechado $[0,1]$, com a seguinte expressão:

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{-10}{16}x+1 & se \quad 0 \leq x < 1{,}60 \\ 0 & se \quad x \geq 1{,}60 \end{cases}$$



Em nosso exemplo, *u* indica 'quanto o *x* pertence a *A*'. Se dissermos que *A* é o conjunto das pessoas baixas, poderemos dizer que uma pessoa de 1,75m não pertence a esse conjunto, ou seja, se calcularmos seu grau de pertinência ao conjunto *A*, utilizando a função acima, teremos $u(1{,}75) = 0$. Por outro lado, uma pessoa de 1,30m tem grau de pertinência $u(1{,}30) = 3/16$, e uma pessoa de 1,59m apresenta $u(1{,}59) = 1/160$. Isso indica que a primeira pessoa pertence mais ao conjunto *A* do que a segunda.

Para definir formalmente um conjunto *fuzzy*, vamos definir X como um conjunto clássico e $u\colon X \to [0, 1]$ como função de X no intervalo real $[0,1]$, que chamamos de 'função grau de pertinência' ou apenas 'função pertinência'. Um subconjunto *fuzzy* de X é um conjunto de pares ordenados $\{(x, u(x));\ x \in X\}$. Costuma-se representar o conjunto *fuzzy* por sua função pertinência *u*, denominando os subconjuntos *fuzzy* apenas de conjuntos *fuzzy*.

Na lógica clássica, dados dois conjuntos A e B, a tabela-verdade para o conectivo 'e ($\wedge$)' é dada por:

^	0	1
0	0	0
1	0	1

Matematicamente, esta tabela interpreta a função $\wedge$: {0, 1} X {0, 1} $\rightarrow$ {0, 1}. Se *u* e *v* são conjuntos *fuzzy*, a extensão do conceito acima é dada por meio de uma função chamada T-norma, com as seguintes propriedades:

1. T(1,a) = a, para todo a $\in$ [0,1];
2. T(a,b) = T(b,a), para todos a,b $\in$ [0,1];
3. Se a $\leq$ c e b $\leq$ d, então T(a,b) $\leq$ T(c,d);
4. T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c), para todos a,b,c $\in$ [0,1].

Com esta definição, o conceito de conjunção é generalizado; se considerarmos T(a,b) = min {a,b}, esta função será uma T-norma, que não só vale para conjuntos *fuzzy*, mas também funciona bem para construir a tabela-verdade pontual acima. Outros exemplos de T-normas utilizadas para generalizar conjunções ou interseções entre conjuntos fuzzy são os seguintes:

1. T(a,b) = a . b - produto algébrico;
2. T{a,b) = max {0, a+b-1} - diferença limitada.

No caso da disjunção, dados dois conjuntos *u* e *v*, a tabela-verdade para o conectivo 'ou (v)' é dada por:

v	0	1
0	0	1
1	1	1

Novamente, esta tabela interpreta a função v: {0, 1} *X* {0, 1} $\rightarrow$ {0, 1}. Se *u* e *v* são conjuntos *fuzzy*, a extensão do conceito acima é dada por uma função chamada T-conorma, com as seguintes propriedades:

1. $T_c(0,a) = a$, para todo $a \in [0,1]$;
2. $T_c(a,b) = T_c(b,a)$, para todos $a,b \in [0,1]$;
3. Se $a \leq c$ e $b \leq d$, então $T_c(a,b) \leq T_c(c,d)$;
4. $T_c(a,T_c(b,c)) = T_c(T_c(a,b),c)$, para todos $a,b,c \in [0,1]$.

Neste caso, um exemplo de generalização *fuzzy* da disjunção ou união é dado por $T_c(a, b) = \max\{a, b\}$. Observa-se que também neste caso esta função satisfaz a tabela-verdade acima. Outros exemplos seriam:

1. $T_c(a, b) = a + b$ – adição algébrica;
2. $T_c(a, b) = \min\{1,a+b\}$ – adição limitada.

Se citarmos interseção e união de conjuntos *fuzzy*, é natural que se apresente o complementar de um conjunto *fuzzy*. Esta função é interpretada como o grau de não-pertinência de um elemento a um conjunto e deve obedecer a algumas regras, como as que listaremos a seguir.

Dizemos que uma função $c: [0,1] \rightarrow [0,1]$ é um complementar *fuzzy* de um conjunto *fuzzy* *u*, se:

1. $c(0)=1$ e $c(1)=0$;
2. Para todo $a,b \in [0,1]$, se $a \leq b$ então $c(b) \leq c(a)$;
3. $c(c(a))=a$, para todo $a \in [0,1]$;
4. c é uma função contínua.

O exemplo clássico de complementar de conjunto *fuzzy* *u* é $c(u(x)) = 1-u(x)$, para todo $x \in X$.

Poderíamos continuar com as leis de De Morgan (NGUYEN; WALKER, 1997:23), caracterizações de conjuntos *fuzzy*, seus níveis e algumas aplicações. Este breve texto serve apenas para aguçar a curiosidade do leitor sobre o assunto; no entanto, antes de encerrá-lo, ilustraremos a interseção de conjuntos *fuzzy* com uma aplicação[1].

1. Para mais referências e exemplos, ver Nguyen; Walker, 1997.

4. Um exemplo de aplicação

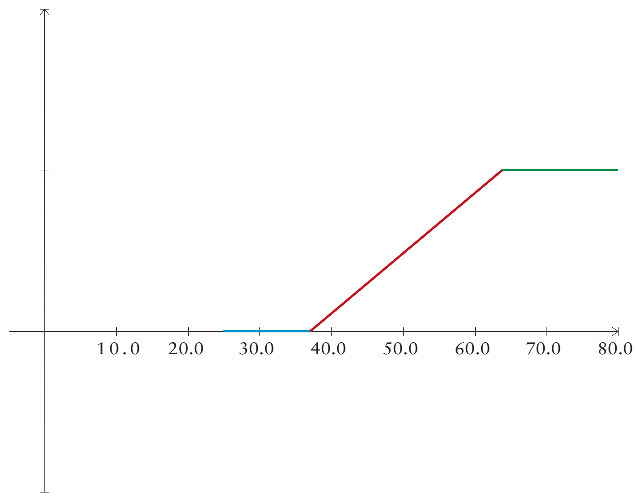
A teoria *fuzzy* pode ser aplicada em modelos de decisão, de várias maneiras. Bellman e Zadeh (1970) sugeriram um modelo *fuzzy* de tomada de decisão no qual pontos positivos relevantes e contrastantes são expressos em termos de conjuntos *fuzzy* e uma decisão é tomada por uma interseção apropriada desses conjuntos. A situação neste modelo se caracteriza pelos seguintes componentes:

- um conjunto *A* de ações possíveis;

- um conjunto de pontos positivos relevantes G_i (i ∈ N), em que cada conjunto é expresso em função de um conjunto *fuzzy* definido em *A*;

- um conjunto de pontos contrastantes C_j(j ∈ N), em que cada conjunto é expresso em função de um conjunto *fuzzy* definido em *A*.

Suponhamos que uma pessoa precise decidir entre quatro propostas de emprego - a_1, a_2, a_3 e a_4. Seu objetivo é escolher um emprego que ofereça um salário alto, seja interessante e esteja a pequena distância de sua casa. Neste caso, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e os conjuntos *fuzzy* envolvidos representam os conceitos de salário alto, tarefas interessantes e distância pequena de casa. Estes conceitos são altamente subjetivos, dependem do contexto e devem ser definidos especificamente para o indivíduo. O conjunto de pontos positivos é representado em moeda corrente, independentemente dos empregos disponíveis. Para este indivíduo, o conjunto G é dado pelo seguinte gráfico:



Aqui, o eixo dos *x* representa o valor vezes 1.000 reais de salário por ano. Para expressar as propostas de cada emprego, vamos construir um conjunto *fuzzy* G: A → R+, indicando o valor em reais, por ano, de cada uma delas:

G(a1) = 40.000,00

G(a2) = 45.000,00

G(a3) = 50.000,00

G(a4) = 60.000,00

Levando em consideração, de acordo com o gráfico do indivíduo, a função

G e os graus de pertinência de cada ponto em questão, temos a seguinte expressão:

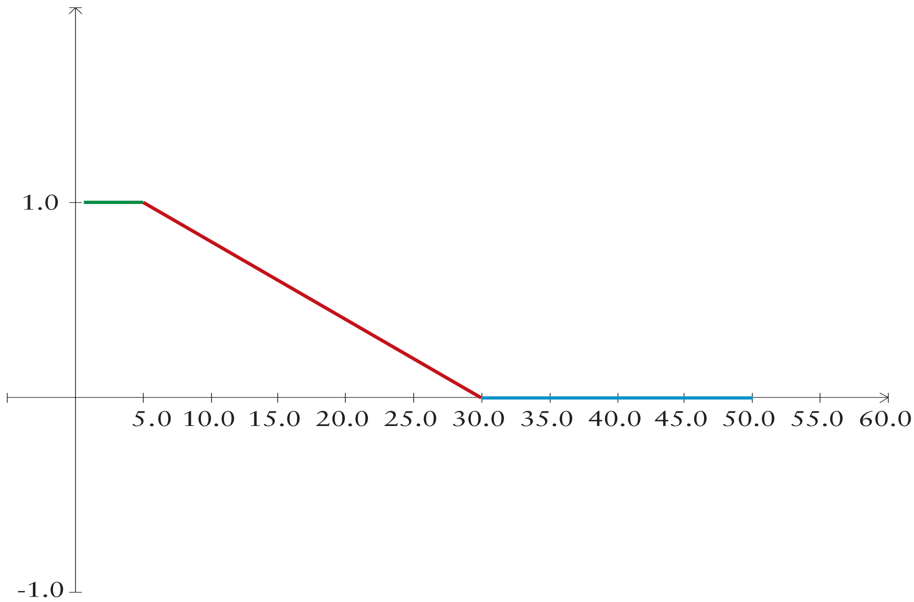
$$G = 0{,}11/a_1 + 0{,}3/a_2 + 0{,}48/a_3 + 0{,}8/a_4$$

O primeiro ponto contrastante é o grau de interesse de cada emprego, e isso também é modelado de acordo com o indivíduo (Neste caso, o indivíduo é que deve avaliar o grau de interesse de cada proposta). Como resultado, neste caso específico, temos a expressão abaixo:

$$C_1 = 0{,}4/a_1 + 0{,}6/a_2 + 0{,}2/a_3 + 0{,}2/a_4$$

O segundo ponto contrastante envolve a distância do emprego até casa e, de acordo com este indivíduo e seu conceito de distância, foi construído o seguinte conjunto *fuzzy* - C_1: A $\rightarrow$ R^+:

O valor de cada proposta de emprego, em quilômetros, é dado por:



$C_1(a_1)$ = 27 quilômetros

$C_1(a_2)$ = 7,5 quilômetros

$C_1(a_3)$ = 12 quilômetros

$C_1(a_4)$ = 2,5 quilômetros

Compondo então o gráfico e os graus de pertinência dos dados, temos a seguinte expressão representativa do segundo conjunto de pontos contrastantes, em termos do conjunto A:

$$C_2 = 0{,}1/a_1 + 0{,}9/a_2 + 0{,}7/a_3 + 1/a_4$$

Aplicando a interseção entre conjuntos *fuzzy*, por meio da T-norma, temos:

$$T(G,C_1,C_2)= \min (\inf G(a), \inf C_1(a),\inf C_2(a))$$

A expressão que representa o conceito de emprego mais desejável é:

$$D = 0{,}1/a_1 + 0{,}3/a_2 + 0{,}2/a_3 + 0{,}2/a_4$$

Neste caso, o emprego a ser escolhido deve ser o a2.

5. Considerações finais

Podemos modelar, com a teoria *fuzzy*, diversas situações em que os dados envolvidos têm um certo 'grau' de incerteza ou imprecisão, ou a classificação de seus atributos não se resume em sim ou não, mas existe a possibilidade de: mais ou menos; talvez; um pouco mais; um pouco menos.

O fato de a teoria *fuzzy* dar esta flexibilidade de modelagem permite ao homem desenvolver algoritmos semelhantes ao pensamento humano. A máquina de lavar roupa desenvolvida com a teoria *fuzzy*, por exemplo, faz a seguinte inferência: se a roupa está muito suja, então deve-se bater muito; se a roupa está pouco suja, então deve-se bater o mínimo possível. Antes da teoria *fuzzy*, este tipo de inferência só podia ser desenvolvido por um ser humano.

Referências bibliográficas

BARROS, Laécio Carvalho de. *Modelos determinísticos com parâmetros subjetivos*. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística – UNICAMP, 1992.

______. *Sobre sistemas dinâmicos fuzzy – Teoria e Aplicações*. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática e Estatística – UNICAMP, 1997.

BARROS, Laécio C.; SOUZA, Suzana A. O.; TONELLI, Pedro. *Two cases of asymptotic smoothness for fuzzy dynamical systems*. Relatório Técnico RT-MAP-001.Instituto de Matemática e Estatística – USP. São Paulo, Fev. 2000.

BELLMAN, R.E.; ZADEH, L.A. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17(4), p.141–164.

BLACK, Max . Vagueness: an exercise in logical analysis. *Philosophy of Science*, 4, p.427-455, 1937.

DAGHLIAN, Jacob. *Lógica e álgebra de Boole*. São Paulo: Atlas, 1995.

KLIR, George J.; YUAN, Bo . *Fuzzy sets and fuzzy logics*. New Jersey: Prentice-Hall, 1995.

KOSKO, Bart . *Fuzzy Thinking*. New York: Hyperion, 1993.

NGUYEN, H.T.; WALKER, E.A. *A first course in fuzzy logic*. New Mexico:

CRC Press, 1997.

ORTEGA, Neli R. S., BARROS, Laécio.C.; MASSAD, E. *An application of the extension principle of fuzzy epidemic models*. Preprint submetido ao Fuzzy Sets and Systems, 2000.

ROOS, Timothy. *Fuzzy logic with engeneering application*. Hardcover, 1994.

RUSSELL, Bertrand. *Introduction to mathematical philosophy*. New York: Simon & Schuster, 1917.

SANCHEZ, E. Medical diagnosis and composite fuzzy relations. *In*: Gupta, M. M.; Ragade R. K.; Yager, R. R. (eds.). *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. New York: North Holland, 1979. p.437-444.

ZADEH, Lofti A. *Fuzzy sets*. *Information and Control*, 8, p.338-353, 1965.