Estudo da teoria do caos e dos fractais, e dos sistemas complexos e suas possíveis aplicações em Matemática

Luís Carlos Barbosa de Oliveira, Edson Arnaldo Mendes
Uninove, Departamento de Ciências Exatas. São Paulo – SP [Brasil]
luis.barbosa@uninove.br

Este trabalho apresenta os primeiros relatos de pesquisa, em andamento, sobre a teoria do caos e dos fractais, por meio de levantamento bibliográfico, além de fazer a transposição didática desses conhecimentos, de modo que sejam utilizados como ferramenta para auxiliar os alunos do ensino médio na compreensão do conceito de variação da equação e da função de segundo grau.

Embora o estudo da teoria do caos e dos fractais possa atingir várias áreas do conhecimento, como Arquitetura e Urbanismo, Economia e Ciência da Computação, limitamos nosso olhar apenas às aplicações na Matemática, mais especificamente à transposição didática do caos como saber científico para o saber ensinar.

O caos é definido, em sua primeira acepção, como vazio obscuro e ilimitado que precede e propicia a geração do mundo (FERREIRA, 2006).

No entanto, alguns autores associam a teoria do caos com sistemas dinâmicos, ou seja, sistemas em movimento. Essa teoria se baseia em demonstrações matemáticas e teorias que tentam descrever processos em movimento, ou seja, sistemas matemáticos que se modificam com o tempo, tais como o tempo, as bolsas de valores ou a distribuição genética de uma população.

O metereologista Lorenz, que estudava a variação do clima a longo prazo, foi o primeiro a perceber que pequenas variações em uma situação inicial podem causar imensas deturpações a longo prazo, exemplificando sua descoberta com a famosa metáfora: "[...] o bater de asas de uma borboleta pode causar um tufão do outro lado do mundo [...]" (apud GLEICK, 1990), conhecida como a metáfora do efeito borboleta.

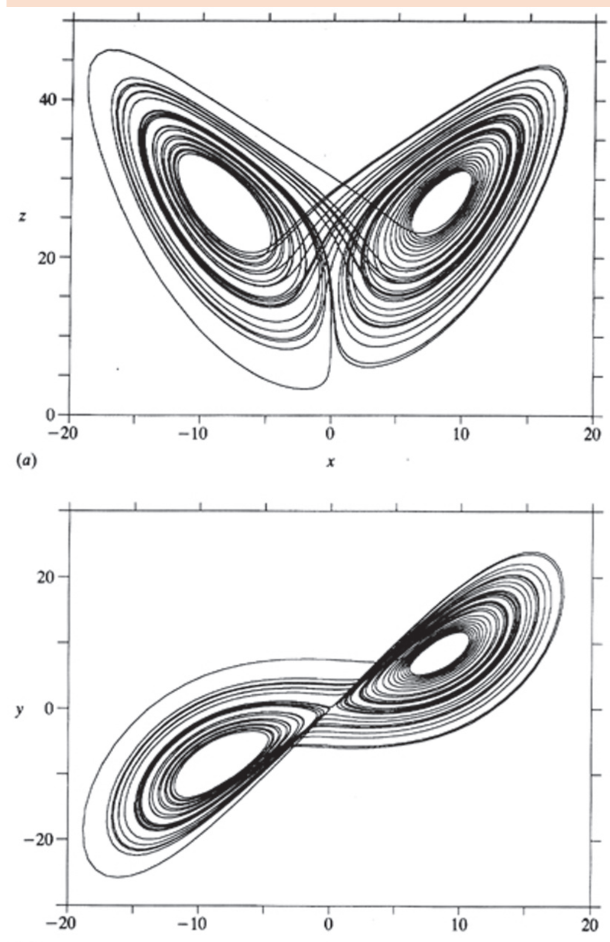

Ilustração 1: Atrator de Lorenz

Fonte: O autor.

Lorenz descobriu algo surpreendente: pequenas mudanças ou pequenos erros em um par de variáveis de um modelo matemático produziam efeitos tremendamente desproporcionais. Para um período de uns dois dias, elas mal faziam diferença. No entanto, extrapolando para um mês ou mais, as mudanças produziam padrões completamente diferentes.

De acordo com Savi (2002), o estudo contempla duas placas paralelas separadas por um fluido. A placa superior está a uma temperatura mais baixa que a inferior. Assim, por ação da temperatura, o fluido da parte inferior tende a subir, enquanto o da porção superior tende a descer por ação da gravidade. Contudo, alterações em algumas condições do problema podem tornar o padrão de resposta bem mais complexo.

Desde então, inúmeros pesquisadores passaram a debruçar-se sobre o caos, analisando diferentes sistemas dinâmicos associados a uma série de situações físicas. May (apud SAVI, 2002), por exemplo, tratou um sistema dinâmico relacionado com o crescimento populacional de espécies de insetos. Esse trabalho ficou conhecido como *Mapa logístico*, que avalia a população em um ano, X_{i+1}, a partir do ano anterior, Xi, obtendo o seguinte modelo: $X_{i+1} = \alpha X_i (X_{i-1})$. O parâmetro α define o tipo de resposta do sistema. Sem dúvida, trata-se de um sistema simples do ponto de vista matemático e que possui uma dinâmica muito rica.

Segundo Batanete e Castro (2004), a teoria do caos não é uma teoria de desordem, mas busca, no aparente acaso, uma ordem intrínseca determinada por leis precisas. Além do clima, outros processos aparentemente casuais apresentam certa ordem, como crescimento populacional e flutuação do mercado financeiro. A geometria fractal constitui, portanto, uma parte da teoria do caos.

O termo fractal, criado por Benoit Mandelbrot, designa um objeto geométrico que nunca perde sua estrutura, independentemente da distância de visão. Fractal, acima de tudo, significa auto-semelhante (BATANETE; CASTRO, 2004).

Ainda segundo Batanete e Castro (2004), Mandelbrot classificou dessa forma os seus objetos de estudo, pois eles possuíam dimensão fracionária. As dimensões não inteiras tornaram-se, então, uma forma de quantificar qualidades que, de outro modo, permaneceriam inquantificáveis: o grau de irregularidade ou tortuosidade de um objeto.

Para Carvalho e Silva (1986), alguns fractais são curvas e outros são superfícies ou nuvens de pontos desconexos. Ressalte-se ainda os que têm formas tão peculiares que nem nas ciências, nem nas artes existem palavras para descrevê-los.

Além disso, os fractais, independentemente da proporção e da escala, repetem-se dentro de si mesmos. Essa característica é denominada de auto-similaridade (CARVALHO; SILVA, 1986).

Neste estudo, ainda em execução, faremos uma transposição didática da teoria do caos e dos fractais para o ensino médio, com o objetivo de disponibilizar ferramentas para os professores utilizarem quando da abordagem das funções, da determinação dos valores de uma função e da abordagem de processos iterativos.

Assim, para Pais (1999), as idéias de saber e transposição estão fortemente interligadas, pois, quando falamos de transposição, sempre podemos relacionar um saber específico. Segundo Pais (1999), na prática educativa, é importante a escolha do conjunto de conteúdos chamado de saber escolar. Por outro lado, o conhecimento científico elaborado na academia e sempre descontextualizado e despersonalizado é chamado de saber sábio ou saber científico.

Chevallard (1991 apud PAIS, 1999) definiu transposição didática como:

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar ou saber escolar sofre então um con-

> junto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os "objetos de ensino". O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino é chamado transposição didática.

Dessa forma, tomaremos a equação, que descreve o crescimento de uma determinada população, em que r é uma constante que pode ser associada à quantidade de comida disponível (CARVALHO; SILVA, 1986).

Segundo o autor, para essa equação

$$X_{n+1} = r.X_n(1 - X_n) \text{ ou } r.X_n - r.X^2_n$$

variando o valor da constante r, obteremos um fractal chamado Diagrama de Bifurcação.

Referências

BATANETE A.; CASTRO, A. *Natureza: caos ou ordem fundamentos do ensino da álgebra*. Coimbra: 2004. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2005/natureza.doc>. Acesso em: 12 out. 2006.

CARVALHO, M. C. C. S.; SILVA, A. *Fractais: uma breve introdução*. 1. ed. São Paulo: Ed. da Faculdade São Judas, 1986.

GLEICK, J. *Caos: a construção de uma nova ciência*. 1. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1990.

FERREIRA, A. B. de H. *Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa*. 3. ed. São Paulo: Positivo, 2004.

PAIS, L. C. Transposição didática. In: MACHADO, S. D. A. et al. *Educação matemática: uma introdução*. 1. ed. São Paulo: Educ, 1999. p. 13-42.

SAVI, M. A. Caos em sistemas dinâmicos. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 1., 2002, São José dos Campos. *Anais*... São José dos Campos: 2002. p. 1-27.

Para referenciar este texto
OLIVEIRA, L. C. B. de; MENDES, E. A. Estudo da teoria do caos e dos fractais, e dos sistemas complexos e suas possíveis aplicações em Matemática. *Exacta*, São Paulo, v. 4, n. especial, p. 99-101, 25 nov. 2006.