

Estudo comparativo entre métodos de otimização de problemas com múltiplas respostas

Study comparing optimization methods for problems with multiple responses

Fabrcio Maciel Gomes¹

Félix Monteiro Pereira²

Fernando Augusto Silva Marins³

Messias Borges Silva⁴

Resumo: Este trabalho tem o objetivo de avaliar o desempenho conjunto das funções aglutinadoras Desirability e Desirability Modificada, utilizadas com dois métodos de busca por melhores resultados, o Gradiente Reduzido Generalizado e a metaheurística Recozimento Simulado. O desempenho das possíveis combinações foi avaliado por meio da Distância Absoluta e do Desvio Médio Percentual. Para a implementação dos métodos de otimização foram selecionados, na literatura, três casos de estudo envolvendo problemas de múltipla resposta. Os resultados obtidos para os casos de estudo selecionados indicam um melhor desempenho da função aglutinadora *Desireability* Modificada, independente do método de busca utilizado, para a otimização simultânea de múltiplas respostas, especialmente quando essas respostas são modeladas por equações contendo termos quadráticos, independentemente do número de termos, do tipo de respostas e do número de variáveis que possam conter. A metodologia e os resultados apresentados neste trabalho visam colaborar com a pesquisa, o desenvolvimento e a avaliação de técnicas avançadas para a otimização multirespostas que são relevantes na busca de especificações para o aumento da eficiência em processos industriais.

Palavras Chave: Otimização multiresposta. Metaheurística. Recozimento simulado. Desejabilidade.

Abstract: This work aims to evaluate the performance of two agglutinating functions, Desirability and, Modified Desirability, performed with two search methods, the Generalized Reduced Gradient and, the meta-Heuristic Simulated Annealing. The performance of methods was assessed by the Absolute Distance and the Mean of Deviation Percentage. For the optimization methods implementation were selected three multiple-response cases from the literature. The results of methods assessment show a better performance for the modified Desireability function, regardless of the search method for the multiple-response optimization, especially when these responses are modeled by equations within quadratic terms, regardless of: the number of terms; the types of responses; and, the number of variables. The methods and the results presented in this paper aim to collaborate with the research, development and assessment of advanced techniques for multi-response optimization in order to increase the performance of industrial processes.

Keywords: Optimization, Multiple-response. Meta-heuristic. Simulated annealing. Desirability.

¹ Universidade de São Paulo – USP
Departamento de Engenharia Química
Escola de Engenharia de Lorena
fmgomes@usp.br

² Universidade de São Paulo – USP
Departamento de Engenharia Química
Escola de Engenharia de Lorena
felixmpereira@usp.br

³ Universidade Estadual Paulista – UNESP
Departamento de Produção – DPD
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – FEG
fmarins@feg.unesp.br

⁴ Universidade de São Paulo – USP
Departamento de Engenharia Química
Escola de Engenharia de Lorena
messias@dequi.eel.usp.br

1 Introdução

Qualquer produto entregue a um cliente, seja ele interno ou externo, é previamente avaliado levando-se em consideração múltiplas características da qualidade ou múltiplas respostas. O principal objetivo de qualquer iniciativa de melhoria no processo é determinar as melhores condições das variáveis de processo que otimizem simultaneamente todas as respostas desejadas. Entretanto, a condição ideal para uma resposta individual, raramente resulta em uma melhor condição global (Bera & Mukherjee, 2016). Segundo Khuri (1996) a otimização simultânea de múltiplas respostas correlacionadas é geralmente denominada como “*multiple response optimization*” (MRO). O objetivo da MRO é determinar as melhores condições de processo que resultem numa melhora global de todas as respostas envolvidas no modelo matemático que descreve o processo.

A análise de problemas com múltiplas respostas tem sido alvo de um interesse crescente em diferentes áreas do conhecimento (Oliveira, Oliveira, Conceição, & Leles, 2016; Takker, Parikh, & Desai, 2016; Simsek & Uygunoglu, 2016). A resolução deste tipo de problemas exige que se modele cada uma das respostas que se pretende otimizar por uma função que descreva a denominada Superfície de Resposta, ou seja, que permita estimar o valor da resposta dentro do intervalo de variação definido para as variáveis envolvidas no estudo. Essas funções (equações de regressão múltipla) são normalmente obtidas da análise do resultado das experiências desenhadas pelo modelo de Box-Behnken, Compósito Central ou de desenhos fatoriais a três níveis, sendo em geral equações de segunda ordem. Ye (2003) caracteriza estes modelos e afirma que o modelo Compósito Central (CCD – *Composite Central Design*) é o mais utilizado.

Neste contexto, em estudos de otimização que envolvem um pequeno número de respostas e de variáveis, em geral duas ou três, têm sido utilizada uma prática que consiste na sobreposição dos gráficos da superfície de cada uma das respostas para que, através da simples observação, se identifiquem os valores das variáveis que permitirão alcançar os melhores resultados nessas respostas (Carlile, Montgomery, & Runger, 2000). Porém, esta é uma prática não recomendada para um maior número de respostas e/ou variáveis. Nestes casos é necessário utilizar um algoritmo de otimização para determinar o valor das variáveis que poderá permitir encontrar o melhor compromisso entre os valores das respostas (Konzen, Furtado, Carvalho, Molz, & Ferrão, 2003).

De acordo com Montgomery (2001), encontrar especificações que resultem em aumento da eficiência de um processo industrial, além da obtenção de produto com a qualidade desejada e que atendendo às tolerâncias estabelecidas, constituem motivo suficiente para o uso de técnicas avançadas de otimização.

Há alguns anos, diferentes algoritmos como as metaheurísticas foram introduzidas e propostas para a otimização de problemas contendo múltiplas respostas, com modelos obtidos por meio de um planejamento de experimentos e com restrições lineares. Em geral, as respostas a serem otimizadas são aglutinadas formando uma única função objetivo a ser otimizada (Gomes, Pereira, Marins, & Silva, 2017).

Entre os algoritmos empregados estão: algoritmo genético, recozimento simulado, busca tabu, colônia de formigas, entre outras. Todos esses algoritmos têm-se mostrado bons mecanismos para solucionarem problemas de otimização (Moghaddama, Yalaouia, & Amodeo, 2015).

Este artigo apresenta um estudo comparativo entre algumas metodologias de aglutinação de respostas descritas na literatura e a utilização do al-

goritmo de Recozimento Simulado na Otimização de Processos com Múltiplas Respostas.

2 Aglutinação de respostas

Uma estratégia largamente utilizada em otimização com múltiplas respostas é a aglutinação de todas as respostas envolvidas no problema em questão, a função resultante do processo de aglutinação será portanto a função objetivo da otimização (Tamiz & Jones, 2016).

Existem diversas maneiras descritas na literatura sobre como aglutinar as múltiplas respostas.

Segundo Silva e Marins (2015), o método de aglutinação de resposta empregado pode gerar um problema com a incomensurabilidade das respostas, isto ocorre nos métodos de aglutinação que não possuem normalização das respostas.

2.1 O método *Desirability*

Uma das técnicas mais utilizadas para otimizar simultaneamente várias respostas consiste em transformar as equações que modelam cada uma dessas respostas em funções utilidade individuais, e depois proceder à otimização de uma função utilidade global, conhecido com *Total Desirability* (D), que é descrita em termos das funções utilidade individuais. A otimização simultânea de várias respostas transforma-se assim na otimização de uma única função. Os grandes impulsionadores desta abordagem foram Derringer e Suich (1980), que continua a ser uma base de comparação para outros métodos em termos dos resultados que permite obter. Além disto a sua fácil interpretação e implementação motivaram que o método seja descrito e o seu desempenho reavaliado neste artigo.

Derringer e Suich (1980) apresentam funções utilidade individuais para respostas do tipo Nominal é Melhor (NTB – *Nominal The Better*),

Maior é Melhor (LTB – *Larger The Better*) e Menor é Melhor (STB – *Smaller The Better*).

Quando o valor alvo (T) de uma resposta ($\hat{y}(x)$) está entre um valor máximo (U) e um valor mínimo (L), como mostrado na Figura 1, diz-se que a resposta é do tipo NTB com a correspondente função utilidade $d(\hat{y}(x))$, que por uma questão de simplificação será aqui representada por d , podendo ser definida como em (1):

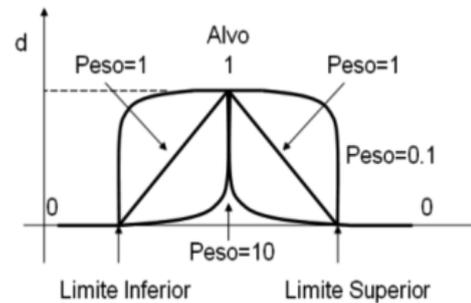


Figura 1: Função Desirability Normalizar

Fonte: Pimenta, Silva, Salomon, Pentead, & Gomes (2015).

$$d = \begin{cases} \left[\frac{\hat{y} - L}{T - L} \right]^S & L \leq \hat{y} \leq T \\ \left[\frac{\hat{y} - U}{T - U} \right]^R & T \leq \hat{y} \leq U \\ 0 & \hat{y} < L \text{ ou } \hat{y} > U \end{cases} \quad (1)$$

onde R e S são fatores de ponderação, que podem assumir valores maiores que 1 quando se deseja priorizar a maximização ou a minimização da resposta.

Quando o valor alvo T deve atingir o valor máximo da função, a resposta diz-se do tipo LTB,

conforme ilustrado na Figura 2, e a correspondente função utilidade d pode ser definida como em (2):

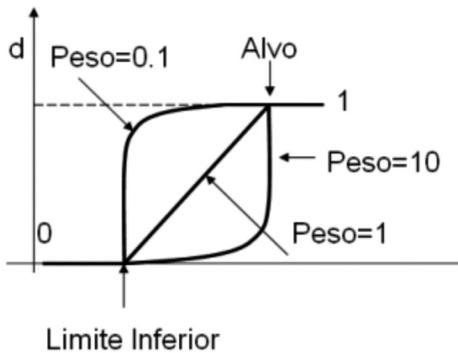


Figura 2: Função Desirability Maximizar
Fonte: Pimenta et al. (2015).

$$d = \begin{cases} 0 & \hat{y} < L \\ \left[\frac{\hat{y} - L}{U - L} \right]^R & L \leq \hat{y} \leq U \\ 1 & \hat{y} > U \end{cases} \quad (2)$$

Quando o valor alvo deve atingir o valor mínimo da função, conforme a Figura 3, a resposta diz-se do tipo STB com a correspondente função utilidade d sendo definida como em (3):

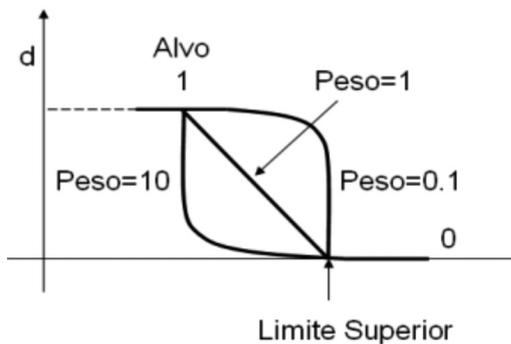


Figura 3: Função Desirability Minimizar
Fonte: Pimenta et al. (2015).

$$d = \begin{cases} 0 & \hat{y} > U \\ \left[\frac{\hat{y} - U}{L - U} \right]^R & L \leq \hat{y} \leq U \\ 1 & \hat{y} < L \end{cases} \quad (3)$$

De acordo com Derringer e Suich (1980), a otimização das respostas envolvidas no estudo pode ser efetuada por meio da maximização da função utilidade global dada por (4):

$$D = (d_1 \times d_2 \times d_3 \times \dots \times d_p)^{1/p} \quad (4)$$

onde p corresponde ao número de respostas a serem otimizadas.

De acordo com Derringer (1994) pode-se utilizar (5) ao invés de (4) na determinação do valor da função utilidade global, com a possibilidade de atribuir-se pesos de importância para cada função utilidade:

$$D = \left(d_1^{w_1} \times d_2^{w_2} \times d_3^{w_3} \times \dots \times d_p^{w_p} \right)^{1/\sum_{i=1}^p w_i} \quad (5)$$

Entretanto, segundo Castillo e Montgomery (1993), afirmam que basta que uma das funções d tenha um valor inaceitável, por exemplo o valor mínimo ($d = 0$), para que a solução global também se torne inaceitável ($D = 0$).

2.2 O método Desirability modificado

Ch'ng, Quah, e Low (2005) propõem que a função utilidade global, definida por Derringer e Suich (1980) seja modificada na forma de uma

média aritmética, para evitar que o método de busca apresente falsos valores ótimos.

As modificações propostas podem ser observadas na Figura 4.

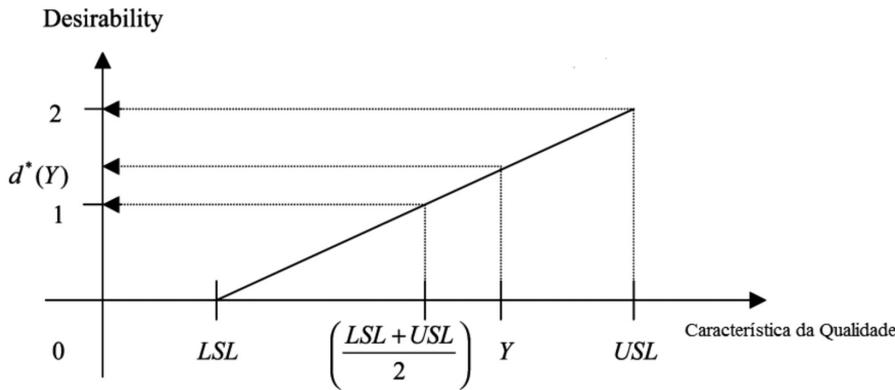


Figura 4: Função Desirability Modificada
 Fonte: Adptada de Ch'ng et al. (2005).

Pode-se observar na Figura 4 que o valor das funções utilidade individuais variam em um intervalo entre 1 e 2, sendo impossível obterem um valor nulo que comprometeria os resultados obtidos na função utilidade global.

As funções utilidade individuais podem ser determinadas como em (6).

$$d_i = \frac{2 \cdot \hat{y}_i - (U + L)}{U - L} + 1 = \frac{2 \cdot \hat{y}_i}{U - L} + \frac{-2 \cdot L}{U - L} = m \cdot \hat{y}_i + c \tag{6}$$

com $0 \leq d_i \leq 2$.

A função utilidade global pode ser calculada como em (7):

$$\text{Total Desirability} = \frac{\sum_{i=1}^p e_i \cdot |d_i^*(Y_i) - d_i^*(T_i)|}{p} \tag{7}$$

com $d_i^*(Y_i)$ sendo o valor obtido pela função utilidade individual para a resposta i , $d_i^*(T_i)$ é o valor alvo da função utilidade individual, p é o número total de resposta aglutinadas pela função,

e_i é o peso atribuído a resposta i ; sabendo que $\sum_{i=1}^p e_i = 1$.

Outro fator importante na modificação proposta por Ch'ng *et al.* (2005) é que não há necessidade de se fazer um ajuste polinomial nas funções utilidade individuais pois não há ponto de interrupção caso o valor obtido da resposta se encontre acima ou abaixo do valor alvo.

3 Algoritmos de busca

3.1 Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)

O método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) foi apresentado por Abadie e Carpentier (1965) para a solucionar problemas de programação matemática com uma função objetivo não linear e restrições lineares, este trabalho foi baseado no método do Gradiente descrito por Rosen (1960) e no método do Gradiente Reduzido descrito por Wolfe (1963). Uma descrição detalhada do método GRG pode ser encontrada no trabalho de Mouatasim, Ellaia, e De Cursi (2014).

Waren e Lasdon (1979) deram uma descrição detalhada do desempenho de vários códigos computacionais em uso na época, informando a diferenciada qualidade do GRG. Posteriormente, Lasdon, Waren, e Ratner (1980) efetuaram algumas modificações no algoritmo e o batizaram de GRG2. Ressalta-se que estas modificações foram realizadas no algoritmo computacional preservando-se o método original.

Segundo Kóksoy e Yalcinoz (2006), o GRG é o método mais empregado na resolução de pro-

blemas com múltiplas respostas, fato este devido a sua facilidade de implantação e de seu algoritmo estar disponibilizado no pacote Solver que acompanha o software Microsoft Excel®. Entretanto, Lasdon et al. (1980) afirmam que a maior limitação da utilização do GRG provém do fato que é necessário que a estimativa inicial dos parâmetros seja próxima ao valor do ponto ótimo para que se tenha uma garantia de convergência.

3.2 Recozimento simulado

O Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*) é uma metaheurística que foi inicialmente concebida para a minimização de problemas discretos (Kirkpatrick, Gelatt, & Vecchi 1983). Atualmente este método vem sendo muito utilizado para resolver problemas de grande complexidade, onde há um grande espaço de soluções e a presença de pontos ótimos locais (Haridass, Valenzuela, Yucekaya, & Mcdonald, 2014).

O algoritmo do Recozimento Simulado tem várias vantagens quando aplicado a problemas onde existe um grande número de mínimos locais e o mínimo global é difícil de se determinar (Cai & Ma, 2010). Essas vantagens incluem um amplo intervalo de busca, garantindo que o algoritmo não fique preso a mínimos locais e se possa determinar o mínimo global, bem como apresenta baixa sensibilidade referente a escolha da solução inicial e a sua simplicidade relativa de implementação (Mahmoodpour & Masihi, 2016).

Este algoritmo é fundamentado em uma analogia com a termodinâmica, ao simular o resfriamento de um conjunto de átomos aquecidos, operação conhecida como recozimento.

Quando um metal é aquecido até seu ponto de fusão, sua energia interna é alta e assim suas moléculas se movem rapidamente. Quando a temperatura é reduzida, as moléculas vão gradativamente diminuindo sua velocidade de movimento, a medida em que a energia interna também dimi-

nui. Assim, próximo ao ponto de congelamento, o metal se torna sólido, e o estado final das moléculas do metal são determinadas pelos seus comportamentos ou pela velocidade de resfriamento.

O metal pode resultar em uma forma amorfa, sem uma forma definida como o vidro ou como um cristal com muitos defeitos em sua estrutura, quando o resfriamento for realizado de forma rápida, o que se chama de processo *quenching* (esfriamento rápido). Ou, ainda, pode resultar em um cristal, onde todas as suas moléculas estão alinhadas e correspondem a uma configuração de mínima energia do sistema, quando o resfriamento é executado lentamente, chamamos de processo *annealing* (recozimento para uma recristalização).

Essa técnica começa sua busca a partir de uma solução inicial qualquer. O procedimento principal consiste em um *loop* que gera aleatoriamente, em cada iteração, um único vizinho x^* da solução corrente x . Se este vizinho for melhor que o original ele é aceito e substitui a solução corrente. Se ele for pior por uma quantidade Δ , ele é aceito com uma probabilidade $\exp^{-\Delta/t}$, onde t , que é um parâmetro chamado de Temperatura, decresce gradualmente conforme o progresso do algoritmo. Esse processo é repetido até que t seja tão pequeno que mais nenhum movimento seja aceito. A melhor solução encontrada durante a busca é tomada como uma boa aproximação para a solução ótima (Hammouche, Diaf, & Siarry, 2010).

Segundo Wang *et al.* (2016), a temperatura inicial atribuída ao algoritmo Recozimento Simulado deve ser alta. No entanto, se este valor for muito elevado, provoca-se um desperdício do custo computacional com iterações desnecessárias. O valor inicial da temperatura então deve ser calibrado de tal maneira que permita com que o Recozimento Simulado aceite movimentos de piora na função custo para poder escapar de pontos ótimos locais.

4 Método

Os métodos de busca utilizados na determinação das melhores respostas foram o Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), cuja a implementação foi efetuada seguindo o tutorial apresentado no Apêndice A.

A metaheurística Recozimento Simulado (RS) foi implementada conforme o fluxograma demonstrado na Figura 5.

O algoritmo da metaheurística Recozimento Simulado foi desenvolvido no software Scilab v. 5.2.2.

Os parâmetros empregados no algoritmo do Recozimento Simulado, para todos os estudos de casos realizados neste trabalho, estão descritos na Tabela 1. A escolha dos parâmetros foi realizada através de um método de calibração para o Recozimento Simulado descrito por Gomes (2015).

Para se proceder a uma comparação dos métodos numa base equitativa, dado que a função utilidade global não tem a mesma forma em todos eles, o desem-

penho dos métodos foi avaliado com base em medidas de desempenho apresentadas por Xu, Lin, Tang, e Xie (2004). Essas medidas, denominadas de Distância Absoluta (DIA) e Desvio Médio

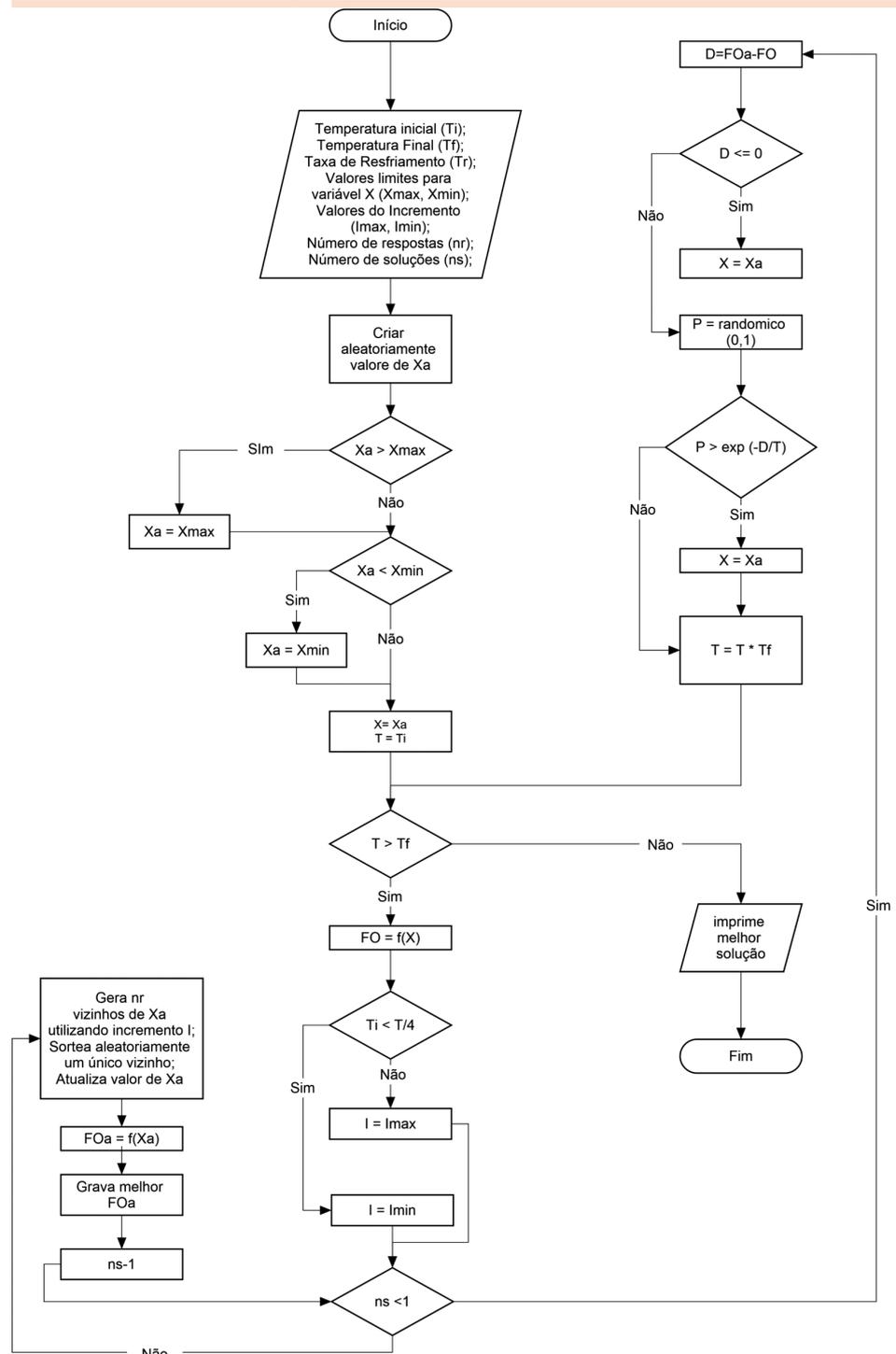


Figura 5: Fluxograma da metaheurística RS
Fonte: Elaboração dos autores.

Tabela 1: Parâmetros utilizados no algoritmo do Recozimento Simulado

Parâmetros	Valores
Temperatura Inicial	1×10^6
Temperatura final	1×10^{-15}
Iterações	300
Número de Soluções	100
Fator de Resfriamento	0,95
x_i inicial	0

Fonte: Elaboração dos autores.

Percentual (DPM), são definidas em (8) e (9), respectivamente.

$$DIA = \sum_{i=1}^p |\hat{y}_i - T_i| \quad (8)$$

$$DPM = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{|\hat{y}_i - T_i|}{T_i}}{p} \quad (9)$$

onde T_i corresponde ao valor alvo da resposta \hat{y}_i .

De acordo com Xu *et al.* (2004), quanto menores forem os valores de DIA e DPM, melhor será o desempenho do método, ou seja, mais próximo do valor alvo estarão todas as respostas.

Foram selecionados três casos para a implementação dos métodos de otimização que são objetos de estudo deste artigo, vale ressaltar que esses problemas contém no máximo três variáveis de decisão e as funções objetivo exibem baixo grau de complexidade. Nos itens 4.1 a 4.3 encontram-se a descrição dos casos selecionados.

4.1 Caso 1: Derringer e Suich (1980)

Este problema consiste na otimização de quatro índices de qualidade: \hat{y}_1 : índice de abrasão; \hat{y}_2 : módulo 200%; \hat{y}_3 : alongamento de ruptura; \hat{y}_4 : dureza, e três variáveis de decisão: x_1 : nível de sílica hidratada, x_2 : nível de silano com agente ligante e x_3 : concentração de enxofre. As equações que modelam cada resposta são apresentados em 10-13.

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 = & 139,12 + 16,49 \cdot x_1 + 17,88 \cdot x_2 + 10,91 \cdot x_3 \cdot \\ & - 4,01 \cdot x_1^2 - 3,45 \cdot x_2^2 - 1,57 \cdot x_3^2 + 5,13 \cdot x_1 \cdot x_2 \\ & + 7,13 \cdot x_1 \cdot x_3 + 7,88 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_2 = & 1261,11 + 268,15x_1 + 246,50x_2 + 139,48x_3 \\ & - 83,55x_1^2 - 124,79x_2^2 + 199,17x_3^2 + \\ & 69,38x_1x_2 + 94,13x_1x_3 + 104,38x_2x_3 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_3 = & 400,38 - 99,76x_1 - 31,40x_2 - 73,92x_3 \\ & + 7,93x_1^2 + 17,31x_2^2 + 0,43x_3^2 + 8,75x_1x_2 \\ & + 6,25x_1x_3 + 1,25x_2x_3 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_4 = & 68,91 - 1,41x_1 + 4,32x_2 + 1,63x_3 + 1,56x_1^2 \\ & + 0,06x_2^2 - 0,32x_3^2 - 1,63x_1x_2 + \\ & 0,13x_1x_3 - 0,25x_2x_3 \end{aligned} \quad (13)$$

Os alvos para a otimização de cada resposta são apresentados em 14-17:

$$T_1 = 170 \quad (14)$$

$$T_2 = 1300 \quad (15)$$

$$T_3 = 500 \quad (16)$$

$$T_4 = 67,5 \quad (17)$$

As restrições para este problema estão descritas em 18-24:

$$-1,682 \geq x_1 \leq 1,682 \quad (18)$$

$$-1,682 \geq x_2 \leq 1,682 \quad (19)$$

$$-1,682 \geq x_3 \leq 1,682 \quad (20)$$

$$\hat{y}_1 \geq 120 \quad (21)$$

$$\hat{y}_2 \geq 1000 \quad (22)$$

$$400 \leq \hat{y}_3 \leq 600 \quad (23)$$

$$60 \leq \hat{y}_4 \leq 75 \quad (24)$$

A função objetivo para este caso, utilizando o método *Desirability* como função aglutinadora é definida em (25)

$$D = \left[\left(\frac{\hat{y}_1 - 120}{170 - 120} \right) * \left(\frac{\hat{y}_2 - 1000}{1300 - 1000} \right) * \left(\frac{\hat{y}_3 - 600}{500 - 600} \right) * \left(\frac{\hat{y}_4 - 75}{67,5 - 75} \right) \right]^{1/4} \quad (25)$$

Deve-se ressaltar que a função objetivo descrita em (25) pode sofrer ajustes em função dos valores obtidos nas respostas individuais 3 e 4, por se tratarem de objetivos de normalização.

A função objetivo para o caso 1, utilizando o método *Desirability* Modificada como função aglutinadora é definida em (26).

$$D_a = \left(\left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_1 - 290}{50} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_2 - 2300}{300} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_3 - 1000}{200} \right) \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_4 - 135}{15} \right) \right| \right) \quad (26)$$

4.2 Caso 2: Khuri e Conlon (1981)

O problema descrito por Khuri e Conlon (1981) tem como objetivo otimizar quatro res-

postas distintas: \hat{y}_1 – dureza (resposta tipo LTB); \hat{y}_2 – coesividade (resposta tipo LTB); \hat{y}_3 – elasticidade (resposta tipo LTB); \hat{y}_4 – compressão à água (resposta tipo LTB), e duas variáveis de decisão: x_1 – cisteína, x_2 – clorato de cálcio. As equações que modelam cada resposta são apresentados em 27-30.

$$\hat{y}_1 = 1,526 - 0,575x_1 - 0,524x_2 - 0,171x_1^2 - 0,098x_2^2 + 0,318x_1x_2 \quad (27)$$

$$\hat{y}_2 = 0,660 - 0,092x_1 - 0,010x_2 - 0,096x_1^2 - 0,058x_2^2 - 0,070x_1x_2 \quad (28)$$

$$\hat{y}_3 = 1,776 - 0,250x_1 - 0,078x_2 - 0,156x_1^2 - 0,079x_2^2 - 0,010x_1x_2 \quad (29)$$

$$\hat{y}_4 = 0,468 + 0,131x_1 + 0,073x_2 + 0,026x_1^2 + 0,024x_2^2 - 0,083x_1x_2 \quad (30)$$

Os alvos para a otimização de cada resposta foram determinados pelos autores do trabalho no qual se baseia este estudo de caso, e são apresentados em (31-34):

$$T_1 = 2,68 \quad (31)$$

$$T_2 = 0,69 \quad (32)$$

$$T_3 = 1,90 \quad (33)$$

$$T_4 = 0,71 \quad (34)$$

As restrições para este problema estão descritas em (35-41):

$$-1,414 \leq x_1 \leq 1,414 \quad (35)$$

$$-1,414 \leq x_2 \leq 1,414 \quad (36)$$

$$-1,414 \leq x_3 \leq 1,414 \quad (37)$$

$$\hat{y}_1 \geq 0,37 \quad (38)$$

$$\hat{y}_2 \geq 0,30 \quad (39)$$

$$\hat{y}_3 \geq 1,10 \quad (40)$$

$$\hat{y}_4 \geq 0,23 \quad (41)$$

A função objetivo para este caso, utilizando o método *Desirability* como função aglutinadora é definida em (42)

$$D = \left[\left(\frac{\hat{y}_1 - 0,37}{2,68 - 0,37} \right) * \left(\frac{\hat{y}_2 - 0,3}{0,69 - 0,3} \right) * \left(\frac{\hat{y}_3 - 1,1}{1,9 - 1,1} \right) * \left(\frac{\hat{y}_4 - 0,23}{0,71 - 0,23} \right) \right]^{1/4} \quad (42)$$

No caso da função objetivo descrita em (18), não há necessidade de ajustes polinomiais por se tratar apenas de respostas do tipo LTB.

A função objetivo para o caso 1, utilizando o método *Desirability* Modificada como função aglutinadora é definida em (43).

$$D_a = \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_1 - 3,05}{2,31} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_2 - 0,99}{0,39} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_3 - 3}{0,8} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_4 - 0,94}{0,48} \right) - 1 \right| \quad (43)$$

4.3 Caso 3: Vining (1998)

O problema descrito por Vining (1998) tem como objetivo otimizar duas respostas distintas: \hat{y}_1 – máxima conversão; \hat{y}_2 – atividade térmica, e três variáveis de decisão: x_1 – tempo de reação, x_2 – temperatura de reação e x_3 – quantidade de cata-

lisador. As equações que modelam cada resposta são apresentados em (44-45).

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 = & 81,09 + 1,03x_1 + 4,04x_2 + 6,20x_3 - 1,83x_1^2 \\ & + 2,94x_2^2 - 5,19x_3^2 + 2,13x_1x_2 + \\ & 11,37x_1x_3 - 3,87x_2x_3 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\hat{y}_2 = 60,23 + 4,26x_1 + 2,23x_3 \quad (45)$$

Os alvos para a otimização de cada resposta foram determinados pelos autores do trabalho no qual se baseia este estudo de caso, e são apresentados em (46-47):

$$T_1 = 100 \quad (46)$$

$$T_2 = 57,5 \quad (47)$$

As restrições para este problema estão descritas em (48-52):

$$-1,663 \leq x_1 \leq 1,663 \quad (48)$$

$$-1,663 \leq x_2 \leq 1,663 \quad (49)$$

$$-1,663 \leq x_3 \leq 1,663 \quad (50)$$

$$\hat{y}_1 \geq 80 \quad (51)$$

$$55 \leq \hat{y}_2 \leq 60 \quad (52)$$

A função objetivo para este caso, utilizando o método *Desirability* como função aglutinadora é definida em (53):

$$D = \left[\left(\frac{\hat{y}_1 - 80}{100 - 80} \right) * \left(\frac{\hat{y}_2 - 55}{60 - 55} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{53}$$

Deve-se ressaltar que a função objetivo descrita em 26 pode sofrer ajustes em função do valor obtido na resposta individual 2, por se tratar de objetivo de normalização.

A função objetivo para o caso 1, utilizando o método *Desirability* Modificada como função aglutinadora é definida em (54).

$$D_a = \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_1 - 180}{20} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_2 - 115}{5} \right) \right| \tag{54}$$

5 Resultados e discussão

Inicialmente foram realizados testes de convergência para o método de busca Recozimento Simulado. Os teste foram realizados com base nos dados do caso 1, sendo efetuadas dez replicatas para cada função de aglutinação propostas neste trabalho. As Figuras 6 e 7, ilustram a média dos resultados obtidos.

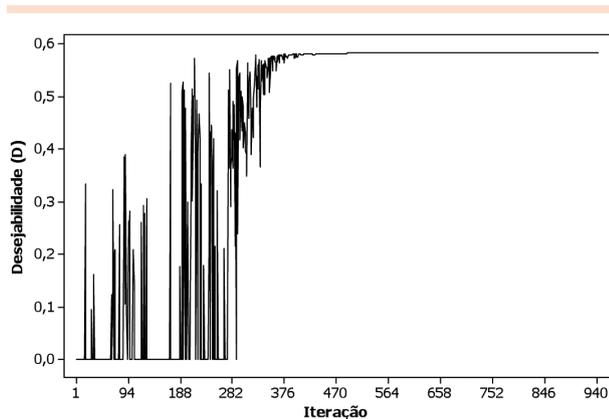


Figura 6: Gráfico correlacionando a Função *Desirability* com o número de iterações utilizando o Recozimento Simulado como método de busca
Fonte: Elaboração dos autores.

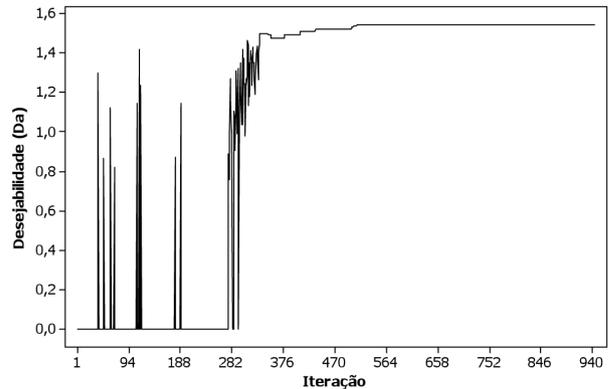


Figura 7: Gráfico correlacionando a Função *Desirability* Modificada com o número de iterações utilizando o Recozimento Simulado como método de busca
Fonte: Elaboração dos autores.

O método de busca Recozimento Simulado demonstra uma convergência satisfatória para sua implementação na determinação do melhor ajuste de processo utilizando as duas formas de aglutinação de respostas empregadas neste trabalho.

Apesar do teste de convergência ter sido efetuado somente para os dados do caso 1, a convergência do método nos demais casos utilizados neste trabalho será conduzida pela análise estatística dos resultados obtidos.

5.1 Estudo do Caso 1

Os resultados obtidos a partir dos dados contidos no caso 1 estão sumarizados na Tabela 2.

Tabela 2: Comparação dos resultados do Caso 1

	Método			
	<i>Desirability</i> /GRG	<i>Desirability</i> Modificada/GRG	<i>Desirability</i> /RS	<i>Desirability</i> Modificada/RS
x1	-0,052	-0,215	-0,053	-0,215
x2	0,148	0,051	0,149	0,051
x3	-0,869	-1,051	-0,869	-1,051
\hat{y}_1	129,42	124,23	129,42	124,23
\hat{y}_2	1300,00	1300,00	1300,00	1300,00
\hat{y}_3	465,93	500,00	466,00	500,00
\hat{y}_4	68,02	67,50	68,03	67,50
DIA	75,16	45,77	75,18	45,77
DPM	7,86%	6,73%	7,86%	6,73%

Fonte: Elaboração dos autores.

Como pode ser observado na Tabela 2, o método de aglutinação de resposta utilizado exerce influência na obtenção do melhor ajuste de processo. Entretanto, o método de busca utilizado não demonstra nenhuma diferença nos valores encontrados. Este resultado pode ser explicado pelo fato das restrições apresentadas neste caso serem todas de primeira ordem, e pela maior eficiência do método GRG quando utilizado com múltiplas estimativas iniciais.

Na Tabela 3 encontram-se sumarizados os valores obtidos pelas análises estatísticas realizadas a partir dos resultados obtidos pelo método de busca Recozimento Simulado com ambos os métodos de aglutinação.

A partir dos dados demonstrados na Tabela 3, pode-se afirmar que apesar de se tratar de um processo estocástico, o método de busca baseado na metaheurística Recozimento Simulado apresenta uma baixa variabilidade em suas respostas. O que garante uma boa acuracidade para este método.

5.2 Estudo de Caso 2

Os resultados obtidos a partir dos dados contidos no caso 2 estão sumarizados na Tabela 4.

Neste estudo de caso, ao analisar a Tabela 4, nota-se que a combinação da função aglutinadora *Desirability* Modificada e a metaheurística Recozimento Simulado utilizada como método de busca, obtiveram o melhor desempenho compara-

Tabela 4: Comparação dos resultados do Caso 2

	Método			
	<i>Desirability</i> /GRG	<i>Desirability</i> Modificada/GRG	<i>Desirability</i> /RS	<i>Desirability</i> Modificada/RS
x1	-0,356	-0,560	-0,356	-0,529
x2	-0,010	0,005	-0,010	-0,162
\hat{y}_1	1,72	1,81	1,72	1,89
\hat{y}_2	0,68	0,68	0,68	0,68
\hat{y}_3	1,85	1,87	1,85	1,87
\hat{y}_4	0,42	0,40	0,42	0,39
DIA	1,31	1,23	1,31	1,15
DPM	20,14%	19,83%	20,14%	19,55%

Fonte: Elaboração dos autores.

do ao demais métodos utilizados neste trabalho. Deve-se ressaltar também que o ajuste proposto utilizando a função aglutinadora *Desirability* não sofre interferência do método de busca, entretanto, no caso da função *Desirability* Modificada, há uma diferença entre os pontos selecionados como melhor ajuste quando utilizamos o GRG e a metaheurística Recozimento Simulado como métodos de busca. A ocorrência deste fato pode ser explicada pela limitação que o GRG encontra em escapar de pontos de mínimos locais, não sendo o método mais apropriado para se encontrar o mínimo global.

Na Tabela 5 encontram-se sumarizados os valores obtidos pelas análises estatísticas realizadas a partir dos resultados obtidos pelo método de busca Recozimento Simulado com ambos os métodos de aglutinação.

Tabela 3: Medidas estatísticas dos resultados obtidos pelo método de busca Recozimento Simulado no caso 1

Função de Avaliação	Método de Busca	Medidas Estatísticas				
		Média	Desvio-Padrão	Coeficiente de Variação	Intervalo de Confiança	
					Limite Superior	Limite Inferior
DPM	<i>Desirability</i> /RS	7,86%	0,001%	0,05%	7,86%	7,86%
	<i>Desirability</i> Modificada/RS	6,73%	0,01%	0,10%	6,74%	6,75%
DIA	<i>Desirability</i> /RS	75,18	0,09	0,12	75,11	75,25
	<i>Desirability</i> Modificada/RS	45,77	0,30	0,66	45,54	46,00

Fonte: Elaboração dos autores.

Tabela 5: Medidas estatísticas dos resultados obtidos pelo método de busca Recozimento Simulado no caso 2

Função de Avaliação	Método de Busca	Medidas Estatísticas				
		Média	Desvio-Padrão	Coeficiente de Variação	Intervalo de Confiança	
					Limite Superior	Limite Inferior
DPM	<i>Desirability</i> /RS	1,31%	0,00%	0,00%	1,31%	1,31%
	<i>Desirability</i> Modificada/RS	1,15%	0,00%	0,00%	1,15%	1,15%
DIA	<i>Desirability</i> /RS	20,14	0,00	0,00	20,14	20,14
	<i>Desirability</i> Modificada/RS	19,55	0,00	0,00	19,55	19,55

Fonte: Elaboração dos autores.

Como pode ser verificado na Tabela 5, a variabilidade da metaheurística Recozimento Simulado é nula neste estudo de caso. Este fato reforça a conclusão, obtida no estudo do caso 1, de que este método de busca exibe baixa variabilidade em suas repostas quando utilizado associado as funções aglutinadoras em questão.

5.3 Estudo do Caso 3

Os resultados obtidos a partir dos dados contidos no caso 3 estão sumarizados na Tabela 6.

A utilização da função *Desirability* como função aglutinadora, conforme observado na Tabela 6, demonstra um desempenho inferior à função *Desirability* adaptada. Pode-se observar também que neste estudo de caso a função aglutinadora influencia mais na obtenção da melhor

Tabela 6: Comparação dos resultados do Caso 3

	Método			
	<i>Desirability</i> /GRG	<i>Desirability</i> Modificada/GRG	<i>Desirability</i> /RS	<i>Desirability</i> Modificada/RS
x1	-0,515	-0,392	-0,390	-0,385
x2	1,688	1,688	1,688	1,688
x3	-0,588	-0,475	-0,497	-0,487
\hat{y}_1	95,26	95,30	95,29	95,30
\hat{y}_2	56,72	57,50	57,46	57,50
DIA	5,51	4,70	4,75	4,70
DPM	3,04	2,35	2,39	2,35

Fonte: Elaboração dos autores.

configuração de processo do que o método de busca empregado.

Neste caso também, o modelo tem uma baixa complexidade, tendo em vista que o mesmo é composto por apenas duas variáveis resposta e nem todas as variáveis do processo apresentam um grau de significância que assegurem sua presença no modelo. Tal fato pode explicar o comportamento similar dos métodos de busca na determinação de um ponto que gere a melhoria do processo.

Na Tabela 7 encontram-se sumarizados os valores obtidos pelas análises estatísticas realizadas a partir dos resultados obtidos pelo método de busca Recozimento Simulado com ambos os métodos de aglutinação.

Os resultados sumarizados na Tabela 7, demonstram que a função aglutinadora *Desirability* gera uma variabilidade maior nas respostas encontradas em comparação com a função aglutinadora *Desirability* adaptada, quando utilizada a metaheurística Recozimento Simulado como método de busca. Tal comportamento não é observado nos demais casos analisados neste trabalho, o que indica que a variação presente nas respostas seja uma particularidade deste caso. Porém, tal variabilidade não é grande o suficiente para se demonstrar a necessidade de réplicas na utilização da metaheurística Recozimento Simulado.

Tabela 7 - Medidas estatísticas dos resultados obtidos pelo método de busca Recozimento Simulado no caso 3

Função de Avaliação	Método de Busca	Medidas Estatísticas				
		Média	Desvio-Padrão	Coeficiente de Variação	Intervalo de Confiança	
					Limite Superior	Limite Inferior
DPM	<i>Desirability</i> /RS	2,39%	0,13%	5,23%	2,49%	2,30%
	<i>Desirability</i> Modificada/RS	2,35%	0,01%	0,13%	2,35%	2,35%
DIA	<i>Desirability</i> /RS	4,75	0,16	3,30	4,87	4,64
	<i>Desirability</i> Modificada/RS	4,70	0,01	0,14	4,72	4,68

Fonte: Elaboração dos autores.

6 Conclusão

O objetivo do presente trabalho foi avaliar o desempenho conjunto das funções aglutinadoras *Desirability* e *Desirability* Modificada, utilizadas com dois métodos de busca por melhores resultados: GRG e a metaheurística Recozimento Simulado.

A função aglutinadora *Desirability* Modificada demonstrou um melhor desempenho, independente do método de busca utilizado em conjunto, quando se pretender otimizar múltiplas respostas, em particular quando essas respostas são modeladas por equações com termos quadráticos independentemente do número de termos que possam conter, do tipo de respostas e do número de variáveis.

Entretanto, em vista da facilidade de utilização, conclui-se que o emprego do GRG seja a alternativa mais prática a ser implementada, uma vez que este método se encontra disponível nas versões mais recentes do software Microsoft Excel®.

Os testes aqui apresentados não esgotam as possíveis combinações do número de variáveis, tipo e número de respostas com base nas quais se poderia avaliar e comparar o desempenho dos vários métodos. No caso de modelos contendo um grande número de variáveis de decisão e com restrições não lineares, os métodos propostos neste artigo podem não exibir o mesmo desempenho e estabilidade de convergência.

Referências

- Abadie, J., & Carpentier, J. (1965, October). Généralisation de la méthode du gradient réduit de Wolfe au cas de contraintes non-linéaires. *In Proceedings IFORS Conference* (pp. 1041-1053).
- Bera, S., & Mukherjee, I. (2016). A multistage and multiple response optimization approach for serial manufacturing system. *European Journal of Operational Research*, 248(2), 444-452. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.018>.
- Cai, W. & Ma, L. (2010). Comparison of approaches based on optimization and algebraic iteration for binary tomography. *Computer Physics Communications*, 181(12), 1974-1981. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2010.09.004>.
- Carlile, W., Montgomery, D., Runger, K. (2000). Optimization problems and methods in quality control and improvement. *Journal of Quality Technology*, 32(1), 1-17. <https://doi.org/10.1080/00224065.2000.11979963>
- Castillo, E. & Montgomery, D. (1993). A nonlinear programming solution to the dual response problem. *Journal of Quality Technology*, 25(3), 199-204. <https://doi.org/10.1080/00224065.1993.11979454>
- Ch'ng, C., Quah, S., Low, H. (2005). A new approach for multiple-response optimization. *Quality Engineering*, 17(4), 621-626. <http://dx.doi.org/10.1080/08982110500225505>
- Derringer, G. C. (1994). A balancing act: optimizing a product's properties. *Quality Progress*, 51-58.
- Derringer, G. & Suich, R. (1980). Simultaneous optimization of several response variables. *Journal of Quality Technology*, 12(4), 214-219. <https://doi.org/10.1080/00224065.1980.11980968>
- Gomes, F. M. (2015). Diferentes Métodos de Aglutinação para Melhoria de Processos com Múltiplas Respostas (Tese de Doutorado), Universidade Estadual Paulista – Júlio Mesquita Filho, Guaratinguetá.

- Gomes, F. M., Pereira, F. M., Marins, F. A. S., Silva, M. B. (2017). Estudo comparativo entre os métodos gradiente reduzido generalizado e algoritmo genético em otimização com múltiplas respostas. *Revista Produção Online*, 17(2), 592-619. <http://dx.doi.org/10.14488/1676-1901.v17i2.2566>.
- Hammouche, K., Diaf, M., Siarry, P. (2010). A Comparative Study of Various Meta-Heuristic Techniques Applied to the Multilevel Thresholding Problem. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 23(5), 676-688. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engappai.2009.09.011>
- Haridass, K., Valenzuela, J., Yucekaya, A. D., McDonald, T. (2014). Scheduling a log transport system using simulated annealing. *Information Sciences*, 264, 302-316. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2013.12.005>.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., Jr., Vecchi, M. P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220(4598), 671-680.
- Khuri, A.I. (1996). *Multiresponse surface methodology*. In S. Ghosh e C. R. Rao (Eds), Handbook of statistic, (1 ed., v. 13, pp. 377-406). Amsterdam: Elsevier Science. [http://dx.doi.org/10.1016/S0169-7161\(96\)13014-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0169-7161(96)13014-5).
- Khuri A. I. & Conlon M. (1981). Simultaneous optimization of multiple responses represented by polynomial regression functions. *Technometrics*, 23(4), 363-375. <http://dx.doi.org/10.2307/1268226>
- Konzen, P.H.A., Furtado, J.C., Carvalho, C.W., Molz, R.F.; Ferrão, M.F. (2003). Emprego do algoritmo busca tabu na determinação de princípios ativos em fármacos. *Produção Online*, 3(1). <http://dx.doi.org/10.14488/1676-1901.v3i1.614>.
- Köksoy, O. & Yalcinoz, T. (2006). Mean square error criteria to multiresponse process optimization by a new genetic algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 175(2), 1657-1674. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2005.09.011>
- Lasdon, L. S., Waren, A. D., Ratner, M. W. (1980). GRG2 User's Guide. *Technical Memorandum*. University of Texas at Austin.
- Mahmoodpour, S. & Masihi, M. (2016). An improved simulated annealing algorithm in fracture network modeling. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 33, 538-550. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jngse.2016.05.056>.
- Moghaddama, A., Yalaouia, F., Amodeo, L. (2015). Efficient meta-heuristics based on various dominance criteria for a single-machine bi-criteria scheduling problem with rejection. *Journal of Manufacturing Systems*, 34, 12-22. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmsy.2014.09.006>.
- Montgomery, D. C. (2001). *Design and analysis of experiments* (4 ed.). New York: Wiley.
- Mouatasim, A. E., Ellaia, R., De Cursi, E. S. (2014). Stochastic perturbation of reduced gradient & GRG methods for nonconvex programming problems. *Applied Mathematics and Computation*. 226(1), 198-211. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2013.10.024>.
- Oliveira, G. A. R., Oliveira, A. E., Conceição, E. C., Leles, M. I. G. (2016). Multiresponse optimization of an extraction procedure of carnosol and rosmarinic and carnosic acids from rosemary. *Food Chemistry*, 211, 465-473. <http://dx.doi.org/10.1016/j.foodchem.2016.05.042>.
- Pimenta, C. D., Silva, M. B., Salomon, V. A. P., Penteado, R. B., Gomes, F. M. (2015) Aplicação das metodologias Desirability e Simplex para otimização das propriedades mecânicas em arames de aço temperados. *Production*, 25(3), 598-610. <http://dx.doi.org/10.1590/0103-6513.094812>
- Rosen, J. B. (1960). The gradient projection method for nonlinear programming. Part I: linear constraints. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 8(1), 181-217. <http://dx.doi.org/10.1137/0109044>.
- Simsek, B. & Uygunoglu, T. (2016). Multi-response optimization of polymer blended concrete: A TOPSIS based Taguchi application. *Construction and Building Materials*, 117, 251-262. <http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.05.027>.
- Silva, A. F. & Marins, F. A. S. (2015). Revisão da literatura sobre modelos de programação por metas determinística e sob incerteza. *Production*, 25(1), 92-112. <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-65132014005000003>.
- Tamiz, M. & Jones, D. (2016). A review of Goal Programming. In Greco, S., Ehrgott, M., Figueira, J. R. (Eds), Multiple criteria decision analysis (1 ed., pp. 903-926). New York: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4939-3094-4_21
- Thakker, M. R., Parikh, J. K., Desai, M. A. (2016). Microwave assisted extraction of essential oil from the leaves of Palmarosa: Multi-response optimization and predictive modelling. *Industrial Crops and Products*, 86, 311-319. <http://dx.doi.org/10.1016/j.indcrop.2016.03.055>.
- Vining, G. (1998). A compromise approach to multiresponse optimization. *Journal of Quality Technology*. 30(4), 309-313. <https://doi.org/10.1080/0024065.1998.11979867>
- Xu, K., Lin, D. K. J., Tang, L., Xie, M. (2004). Multiresponse systems optimization using a goal attainment approach. *IIE Transactions*. 36(5), 433-445. <http://dx.doi.org/10.1080/07408170490426143>.
- Ye, K. (2003). *Interfaces*, 33(5), 96-98. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/20141292>
- Wang, Y., Bu, G., Wang, Y., Zhao, T., Zhang, Z., Zhu, Z. (2016). Application of a simulated annealing algorithm to design and optimize a pressure-swing distillation process. *Computers and Chemical Engineering*, 95, 97-107. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compchemeng.2016.09.014>.

Waren, A. D. & Lasdon, L. S. (1979). The status of nonlinear programming software. *Operations Research*, 27(3), 431-56. <https://doi.org/10.1287/opre.27.3.431>.

Wolfe, P. (1963). The reduced gradient method. In: *Recent Advances in Mathematical Programming*. Graves, R. L. & Wolfe, P. (pp. 67-86).

Para exemplificar e facilitar a implementação do Gradiente Reduzido Generalizado, é apresentada na figura seguinte a folha de cálculo do caso 1 utilizando como função aglutinadora o método *Desirability* Modificado por Ch'ng *et al.* (2005). O procedimento de implementação, utilizando o Microsoft Excel® 2013 pode ser estruturado nos seguintes passos:

- 1- Registrar nas células B3:K6 os coeficientes das equações que modelam as respostas;
- 2- Registrar nas células H9:J12 o valor mínimo (L), o máximo (U) e o valor objetivo (T) das respostas;
- 3- Escrever nas células H15:H18 a fórmulas das equações que modelam as respostas, assumindo que os valores das variáveis irão ser apresentados (determinados pelo EXCEL-Solver®) nas células K15:K7.
- 4- Registrar nas células B15:B18 o valor dos pesos atribuídos às funções utilidade individuais.
- 5- Escrever nas células A9:B12 a fórmula para determinar o valor dos coeficientes das funções utilidade individuais (m; c), de acordo com (8);
- 6- Escrever (8) nas células E9:E12 e determinar o seu valor em função do valor objetivo de cada uma das respostas (células I9:I12).
- 7- Escrever (8) nas células E15:E18 e determinar o seu valor em função dos valores das respostas (células H15:H18).
- 8- Escrever (7) na célula E20 e (9) na célula H20;
- 9- Iniciar o Solver.
- 10- Na caixa de diálogo que irá aparecer, inserir a célula E19 em *Definir Objetivo*, e marcar a opção *Minimizar*.
- 11- Inserir as células K15:K17 em *Alterando Células Variáveis*;
- 12- Adicionar as restrições em *Sujeito as Restrições*:
 $-1.688 \leq K15 : K17 \leq 1.688$ e $L \leq H15 : H18 \leq U$.
- 13- Ativar o método *GRG não linear* na barra de rolagem *selecionar método de*;
- 14- clicar no botão *Opções*;
- 15- Selecionar a *Aba GRG não linear*;
- 16- Em *Multi-inicialização* marcar a opção *Usar início Múltiplo*;

Para determinar os valores das variáveis que permitem obter um valor “ótimo” entre todas as respostas recomenda-se refazer o procedimento utilizando a melhor resposta na implementação anterior como valor inicial para as variáveis de decisão na implementação atual.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	Respostas	X1	X2	X3	X11	X22	X33	X12	X13	X23	
3	Y1	139,12	16,49	17,88	10,91	-4,01	-3,45	-1,57	5,13	7,13	7,88
4	Y2	1261,07	268,13	246,49	139,46	-83,50	-124,74	199,14	69,38	94,13	104,38
5	Y3	400,38	-99,66	-31,39	-73,91	7,93	17,30	0,44	8,75	6,25	1,25
6	Y4	68,91	-1,41	4,32	1,63	1,56	0,06	-0,32	-1,63	0,13	-0,25
7											
8	m	c		Função	Utilidade			L	T	U	
9	0,04	-4,80		d1(T1)	2		Y1	120,00	170,00	170,00	
10	0,01	-6,67		d2(T2)	2		Y2	1000,00	1300,00	1300,00	
11	0,01	-4,00		d3(T3)	1		Y3	400,00	500,00	600,00	
12	0,13	-8,00		d4(T4)	1		Y4	60,00	67,50	75,00	
13											
14											
15	P1	0,25		d1(Y1)	0,1692		Y1	124,23		X1	-0,21495
16	P2	0,25		d2(Y2)	2,0000		Y2	1300,00		X2	0,050886
17	P3	0,25		d3(Y3)	1,0000		Y3	500,00		X3	-1,0506
18	P4	0,25		d4(Y4)	1,0000		Y4	67,50			
19											
20				D	0,3038		DIS	45,77			

Anexo 1

Recebido em 13 jun. 2017 / aprovado em 11 dez. 2017

Para referenciar este texto

Gomes, F. M., Pereira, F. M., Marins, F. A. S., & Silva, M. B. Estudo comparativo entre métodos de otimização de problemas com múltiplas respostas. *Exacta*, São Paulo, v. 16, n. 3, p. 73-88, 2018.